ZEITSCHRIFT
FÜR
PHILOSOPHIE

UND
PHILOSOPHISCHE KRITIK

VORMALS
FICHTE-ULRICISCHE ZEITSCHRIFT

IM VEREIN MIT

DR. H. SIEBECK
PROFESSOR IN GIESSEN

DR. J. VOLKELT
PROFESSOR IN LEIPZIG

UND

DR. R. FALCKENBERG
PROFESSOR IN ERLANGEN

HERAUSGEGEBEN UND REDIGIERT
VON

DR. LUDWIG BUSSE
PROFESSOR IN KÖNIGSBERG I. PR.

BAND 120

LEIPZIG 1902
HERMANN HAACKE
VERLAGSBUCHHANDLUNG.

cendenten Gottesbegriff des KANTschen Systems, welcher nur moralische aber keine physische Bedeutung besitzt.

GOETHE ist kein Philosoph im wissenschaftlichen Sinne gewesen. Aber es heisst ihn verkleinern, wenn man ihn zum Schleppträger einer Philosophie macht, welche trotz ihrer grossen Eigenschaften so unverkennbar den Stempel des Ungenügens an sich trägt wie das System KANTS. Ein wahrhaft universeller Kopf, hat GOETHE auch im Kantianismus die geistige Potenz erkannt, und Vieles, was ihm gemäss war, sich angeeignet. Aber Kantianer war er nie, konnte er nie sein. Vor seinem Geiste standen die Umrisse einer Weltanschauung, die er selbst freilich nur dichterisch zu ahnen, nicht wissenschaftlich zu gestalten und methodisch zu erweisen vermochte, zu der sich aber, wenn sie einst im anbrechenden Jahrhundert ihren PROMETHEUS findet, das Kantische System verhalten wird wie Morgennebel zu hellem Sonnenlicht.

Über den Begriff der Quantität.

Von **Jul. Bergmann.**

1. Zu den Begriffen, durch die wir etwas denken, was eine Grösse hat oder ein Quantum ist, gehört derjenige der Anzahl oder Menge oder Reihe von Dingen. Zu jeder Anzahl oder Menge oder Reihe kann ja eine andere gedacht werden, die grösser ist als sie, und von dem, was diese Möglichkeit gewährt, sagen wir, dass es eine Quantität oder Grösse habe. Wird das Wort Ding in dem weiten Sinne genommen, in welchem es zur Bezeichnung von allem, was Jemand vorstellen mag, von Körpern, Geistern, Wörtern, Gedanken, Eigenschaften, Beziehungen, Begebenheiten, Zeiträumen usw. dient, und wird eine Anzahl von Dingen nicht bloss das, was aus mehr als Einem, sondern auch das, was nur aus Einem Dinge besteht, genannt, so steht der Begriff der Anzahl oder Menge von Dingen dem des überhaupt eine Quantität oder Grösse Habenden so nahe als möglich. Denn um ihn zu bilden, müssen wir nicht bloss von allen Prädikaten, welche die Grösse von etwas bestimmen, wie dem Bestehen aus vier Dingen oder dem Grössersein als eine Reihe von vier Dingen, sondern auch von allen, die, wie das Sichtbar- und das Unsicht-

bar-, das Ponderabel- und das Imponderabel-, das Rund- und das Eckigsein, einem Denkobjekte, welches eine Grösse hat, neben dieser Eigenschaft zukommen können, abstrahieren. Andererseits bedarf er keiner Erklärung und ist einer solchen auch nicht fähig. Wer ihn überhaupt besitzt, indem er die Bedeutung des Ausdruckes Anzahl von Dingen versteht, besitzt ihn in völlig klarer Weise. Es knüpfen sich freilich Probleme an ihn, das metaphysische, wie eine Mehrheit des Seienden möglich sei, und das psychologische, wie er uns entstehe, aber wir brauchen dieselben nicht gelöst zu haben, um uns völlig klar darüber zu sein, was eine Anzahl oder Menge von Dingen sei. So eignet er sich vollkommen zum Ausgangspunkte des Versuches, den Begriff dessen, was überhaupt, in irgend einer Weise, eine Grösse hat, und mit ihm den dieser allgemeinen Eigenschaft zu bestimmen.

Der allgemeine Begriff der Anzahl oder Menge abstrahiert, wie eben bemerkt wurde, einerseits von allen Prädikaten, welche angeben, wie gross etwas sei, und andererseits von allen, welche einem Denkobjekte, das eine Grösse besitzt, neben dieser Eigenschaft zukommen können. Hiernach könnte es scheinen, als sei er mit dem Begriffe dessen, was überhaupt eine Grösse hat, identisch, als seien also die Eigenschaften, eine Grösse zu haben oder ein Quantum zu sein und eine Anzahl von Dingen zu sein, nur verschiedene sprachliche Bezeichnungen desselbigen, woraus folgen würde, dass der Begriff des eine Grösse Besitzenden ebensowenig wie der der Anzahl eine Erklärung fordere oder auch nur zulasse. Allein enthält auch der allgemeine Begriff der Anzahl keine bestimmte Grösse, so ist es doch möglich, dass die Anzahlen nicht das Einzige sind, was eine Grösse hat, und dass sie sich von allem anderen, was diese allgemeine Eigenschaft mit ihnen teilt, durch die besondere Gestalt, in der sie ihnen zukommt, unterscheiden. Es ist m. a. W. denkbar, dass das Prädikat, eine Grösse zu haben, ganz von selbst eine besondere Bedeutung erhält, wenn es auf ein Subjekt, welches eine Anzahl von Dingen ist, bezogen wird. Und wenn auch der Begriff der Anzahl mit demjenigen des überhaupt eine Grösse Besitzenden dem Gegenstande nach identisch sein sollte, so braucht darum noch nicht zugegeben zu werden, dass eine Grösse zu haben und eine Anzahl zu sein nur verschiedene sprachliche Bezeichnungen desselbigen seien, denn zwei Eigenschaften können an sich, objektiv, identisch sein und

sich doch als Begriffsinhalte unterscheiden. So wie zwar das, was wir im Begriffe des gleichseitigen, und das, was wir in dem Begriffe des gleichwinkeligen Dreieckes denken, der Sache nach dasselbe sind, da ein Dreieck nichts weiter als gleichseitig zu sein braucht, um gleichwinkelig, und nichts weiter als gleichwinkelig, um gleichseitig zu sein, aber doch gleichseitiges Dreieck und gleichwinkeliges Dreieck nicht bloss verschiedene Bezeichnungen, sondern auch Bezeichnungen verschiedener Begriffsinhalte sind, oder wie zwar das Bestehen aus zweimal drei Stücken nichts anderes ist als das Bestehen aus vier plus zwei Stücken, aber diesen verschiedenen Bezeichnungen doch auch verschiedene Weisen, die Eigenschaft, die sie bezeichnen, aufzufassen, entsprechen, so können auch das Anzahl-sein und das Grosssein, wenn sie auch der Sache nach identisch sein sollten, sich doch der Auffassung nach oder als Begriffsinhalte unterscheiden. Und so verhält es sich in der That. Wir sind uns bewusst, dass es keine Tautologie, sondern der Ausdruck eines wirklichen Urteils ist, wenn wir sagen, jede Anzahl oder Menge von Dingen habe eine Grösse, und zwar, wenn es noch andere Quanta als die Anzahlen gebe, in einer den Anzahlen eigentümlichen Weise. Wenn dem aber so ist, so ist der Begriff der den Anzahlen gemeinsamen Eigenschaft, sei es überhaupt, sei es auf besondere Art eine Grösse zu haben, einer Erklärung mittels des unmittelbar klaren der Anzahl fähig, nämlich durch Kennzeichnung des Gesichtspunktes, unter welchem wir eine Anzahl betrachten, wenn wir sie auffassen als etwas, was eine Grösse hat.

Ich glaube aber auf allgemeine Zustimmung rechnen zu dürfen, wenn ich sage: durch das Prädikat, eine Grösse zu haben, beziehen wir das, was wir im Begriffe der Anzahl oder Menge denken, auf den Umfang dieses Begriffes, also auf die ebenfalls unmittelbar klare Begriffsreihe, die durch die Wörter Einzahl oder Einheit, Zweizahl oder Zweiheit, Dreizahl oder Dreiheit usw. bezeichnet werden kann. Dass, meine ich, eine Anzahl eine Grösse habe, heisst nichts anderes, als dass sie entweder Einzahl oder Zweizahl oder Dreizahl usw. sei. Die Grösse einer Anzahl selbst ist hiernach nichts anderes als ihre Bestimmtheit (dasjenige, wodurch sie diese bestimmte Anzahl und keine andere ist). Diese nun nennen wir die Zahl der Dinge, aus denen die Anzahl besteht. Von dem Begriffe der Grösse einer Anzahl kann demnach

auch die Erklärung gegeben werden, sie sei die Zahl der sie bildenden Dinge, z. B., die Grösse der Anzahl der Monate jedes Jahres 12, die der seit Christi Geburt verflossenen Jahre 1900, die der Deklinationen der lateinischen Sprache 5. Die Zahlen selbst haben keine Grösse in dem Sinne des Wortes, in welchem wir den Anzahlen eine solche zuschreiben, noch auch in einem Sinne, der mit dem, was wir sonst Grösse nennen, irgend etwas gemeinsam hat. Wenn wir eine Zahl grösser oder kleiner als eine andere nennen, so übertragen wir Eigenschaften auf sie, die den Anzahlen, deren Grösse sie bestimmen, zukommen. Die Anzahl oder Menge, die aus 1000 Dingen, und diejenige, die aus 100 Dingen besteht, sind von verschiedener Grösse, aber die Zahl 1000 ist nicht eigentlich grösser als 100 und die Zahl 100 nicht eigentlich kleiner als 1000. Selbstverständlich will ich mit dieser Bemerkung weder anderen abraten, fernerhin von grossen und kleinen Zahlen zu reden, noch es mir selbst verbieten; sie soll nur Einwendungen gegen die vorstehenden und die nachfolgenden Erörterungen, zu denen der Sprachgebrauch verleiten könnte, vorbeugen.

Es fragt sich nunmehr, ob das, was den Anzahlen insofern zukommt, als jede von ihnen entweder Einzahl oder Zweizahl oder Dreizahl usw. ist, das Grosssein (Haben einer Grösse) überhaupt oder eine besondere Art des Grossseins ist. Das Erstere ist der Fall, wenn es nichts anderes giebt, was gross ist, als die Anzahlen. Verschiedene Weisen des Grossseins könnte es, wenn es sich so verhalten sollte, nur dann geben, wenn es verschiedene Weisen, eine Anzahl von irgend einer Grösse zu sein, gäbe. Das Zweite ist der Fall, wenn die Anzahlen nicht das Einzige sind, was gross ist, denn da in dem allgemeinen Begriffe der Anzahl nicht nur von allen Grössebestimmungen, sondern auch von allen Merkmalen, die in Verbindung mit dem Grosssein vorkommen können, abstrahiert ist, so könnte sich etwas, was gross wäre, ohne eine Anzahl zu sein, von den Anzahlen nur durch die Art seines Grossseins unterscheiden.

Wir haben, wenn wir eine Antwort auf diese Frage suchen, die Wahl zwischen zwei Wegen. Wir können uns nach weiteren Begriffen umsehen, zu deren Inhalt die allgemeine Eigenschaft des Besitzes einer Grösse gehört, und dann untersuchen, ob dieselben sich von dem der Anzahl oder Menge von Dingen dadurch unterscheiden, dass sie andere Weisen des Grossseins enthalten

als dieser; wir können aber auch den Begriff des Grossseins, der sich uns aus der Betrachtung desjenigen der Anzahl ergeben hat, daraufhin ins Auge fassen, ob ihm ein allgemeinerer Begriff entnommen werden könne, in dessen Inhalt sich das, was wir mit dem Worte Grosssein meinen, wiedererkennen lasse. Ich entscheide mich für das letztere Verfahren, da sich uns aus dem Begriffe desjenigen Grossseins, das nur den Anzahlen zukommt, sofort ein anderer heraushebt, der sich in der angegebenen Weise zu ihm zu verhalten scheint. Das Grosssein der Anzahlen nämlich, fanden wir, besteht darin, dass jede entweder eine Einzahl oder eine Zweizahl oder eine Dreizahl usw. ist, also aus einer bestimmten Zahl von Dingen besteht, so dass die Grösse einer Anzahl selbst die Zahl der sie bildenden Dinge ist. Nun sind aber nur die reellen positiven ganzen Zahlen Zahlen von Dingen, während es scheint, dass doch auch die gebrochenen, die irrationalen, die negativen und die imaginären überhaupt die Grösse von etwas zu bestimmen geeignet sein müssen. Es scheint also, dass das Haben einer überhaupt durch eine Zahl bestimmbaren Grösse eine Eigenschaft sei, die zu dem Haben einer durch eine positive ganze Zahl bestimmbaren, also zu demjenigen Haben einer Grösse, welches wir im Begriffe der Anzahl fanden, in dem Verhältnisse des Allgemeinen zum Besonderen stehe. Das Verfahren, das ich zu versuchen gedenke, bestimmt sich demnach näher dahin, dass ich zuerst erwäge, ob in der That die nicht zugleich positiven und ganzen Zahlen dazu dienen können, Denkobjekte, die nicht Mengen sind, in analoger Weise zu bestimmen, wie die zugleich positiven und ganzen die Mengen, sodass diese Denkobjekte unter den Begriff des eine Grösse Habenden oder des Quantums fallen. Wenn diese Frage zu bejahen sein sollte, wäre dann weiter zu untersuchen, wodurch sich die den Denkobjekten, deren Grösse durch eine nicht zugleich positive und ganze Zahl bestimmt werden könnte, eigene Art, eine Grösse zu haben, von der den Mengen eigenen unterscheide, und was beiden Arten gemeinsam sei. Zuvor aber werde ich das Verhältnis der nicht zugleich positiven und ganzen zu den zugleich positiven und ganzen Zahlen näher ins Auge fassen müssen.

I.

2. Die erste Erweiterung des ursprünglichen Zahlbegriffes,

dessen Gegenstand bloss durch diejenigen Zahlen, welche die Bestimmtheit einer Anzahl oder Menge von Dingen sind, die Zahlen der sogenannten natürlichen Zahlenreihe 1, 2, 3 . . . oder die natürlichen Zahlen, gebildet wird, knüpft sich an den Begriff des Subtrahierens. Während nämlich jede Addition, die mit zwei natürlichen Zahlen a und b ausgeführt werden soll, zum Ergebnisse wieder eine natürliche Zahl hat, hat dies die Subtraktion einer natürlichen Zahl b von einer natürlichen Zahl a nur dann, wenn es eine natürliche Zahl c giebt, durch deren Addition zu b man a erhält, kurz, wenn b kleiner als a ist. Es ist dies eine wirkliche d. i. die Möglichkeit, dass das Ergebnis einer mit natürlichen Zahlen vorgenommenen Subtraktion wieder eine natürliche Zahl sei, einschränkende Bedingung, denn man kann nicht von jeder natürlichen Zahl b zu jeder anderen a dadurch gelangen, dass man zu b eine natürliche Zahl c addiert, während man, wenn man in analoger Weise eine Bedingung der Möglichkeit dafür, dass das Ergebnis der Addition zweier natürlicher Zahlen wieder eine natürliche Zahl sei, suchen wollte, nur die unter allen Umständen erfüllte, also nur scheinbare finden würde, dass es eine natürliche Zahl c gebe, durch deren Verringerung um b man a erhalte. Wenn man demnach bestimmt, dass das Ergebnis jeder Subtraktion einer natürlichen Zahl von einer natürlichen Zahl wiederum Zahl genannt werden solle, und voraussetzt, dass eine solche Subtraktion auch dann überhaupt ausführbar sei, wenn die genannte Bedingung dafür, dass eine natürliche Zahl herauskomme, nicht erfüllt sei, so folgt, dass es noch andere Zahlen gebe als die natürlichen, nämlich eine, die das Ergebnis der Subtraktion einer natürlichen Zahl von sich selbst sei: die Null, und eine Reihe solcher, die man erhalte, wenn man von einer natürlichen Zahl eine andere, die grösser sei als sie, oder zuerst sie selbst und dann von dem Ergebnisse, der Null, irgend eine natürliche Zahl subtrahiere, die also kleiner als Null sei: die negativen ganzen Zahlen.

Eine zweite Erweiterung steht in einer analogen Beziehung zu dem Begriffe der Division. Jede Multiplikation, die mit zwei ganzen Zahlen a und b ausgeführt werden soll, hat zum Ergebnisse wieder eine ganze Zahl. Dagegen ist die Möglichkeit, dass die Division einer ganzen Zahl a durch eine ganze Zahl b wieder zu einer ganzen Zahl führe, an die Bedingung gebunden, dass

es eine ganze Zahl c gebe, durch deren Multiplikation mit b man a erhalte, kurz, dass a ein ganzes Vielfaches von b sei, eine Bedingung, die ebenso wenig wie diejenige für die Möglichkeit, dass die Subtraktion einer natürlichen Zahl von einer natürlichen Zahl wiederum eine natürliche Zahl zum Ergebnisse habe, unter allen Umständen erfüllt ist. Nimmt man daher an, dass doch jede Division einer ganzen Zahl durch eine ganze Zahl überhaupt ausführbar sei, und bestimmt man, das Ergebnis solle auch dann, wenn es keine ganze Zahl sei, Zahl heissen, so unterscheidet man von den ganzen eine andere Art von Zahlen: die gebrochenen, die, wie die ganzen, teils positiv teils negativ sind.

Zu einer dritten Erweiterung giebt den ersten Anlass der Begriff des Radizierens. Es sei a eine ganze oder gebrochene, b eine ganze Zahl, so ist unter allen Umständen a^b wiederum eine ganze oder eine gebrochene Zahl, während die Radizierung $\sqrt[b]{a}$ nur dann zu einer ganzen oder gebrochenen Zahl führt, wenn es eine ganze oder gebrochene Zahl c giebt, durch deren Erhebung auf die bte Potenz man a erhält. Und setzt man wieder voraus, dass die Radicierung $\sqrt[b]{a}$ auch dann, wenn diese Bedingung nicht erfüllt sei (abgesehen noch von dem Falle, dass a negativ und b gerade sei), doch überhaupt sich ausführen lasse, so kann man wieder bestimmen, dass die Ergebnisse der Radicierungen auch dann, wenn sie weder ganze noch gebrochene Zahlen seien, unter den Begriff der Zahl fallen (abgesehen wieder noch von dem Falle, dass a negativ und b gerade sei). Nun hat jede dieser neuen Zahlen die Eigenschaft, dass sie, obwohl sie weder einer ganzen noch einer gebrochenen gleich ist, doch, wie jede von diesen, der Grösse nach zwischen zwei der Reihe der ganzen und der gebrochenen angehörigen von beliebig kleiner Differenz steht. Z. B. $\sqrt{2}$ ist grösser als 1 und kleiner als 2, grösser als 1,4 und kleiner als 1,5, grösser als 1,41 und kleiner als 1,42 u. s. w. Es giebt aber noch andere Arten von Rechenoperationen, die in derselben Weise wie die des Subtrahierens, des Dividierens und des Radicierens eine Erweiterung des ursprünglichen Zahlbegriffes rechtfertigen, und wenigstens zum Teil haben die neuen Zahlen, auf die sie führen, z. B. die Zahlen log 2, sin 2, π, e, mit denen, auf welche die Radicierungen führen, die eben genannte Eigen-

schaft gemein. Man kann daher die dritte Erweiterung des Zahlbegriffs dahin bestimmen, dass sie zu den rationalen d. i. den ganzen und den gebrochenen, die irrationalen füge als diejenigen, die mit den rationalen das gemeinsam haben, dass zu jeder von ihnen zwei rationale Zahlen angegeben werden können, von denen die eine grösser, die andere kleiner ist als sie, und zwar rationale Zahlen, deren Differenz kleiner als jede rationale Zahl ist, die genannt werden mag. Da zufolge dieser Definition jede irrationale Zahl durch einen unendlichen unperiodischen Dezimalbruch dargestellt werden kann, und umgekehrt jeder unendliche unperiodische Dezimalbruch eine irrationale Zahl ist, so kann der Begriff der irrationalen Zahl auch, gleich demjenigen der negativen und der gebrochenen, mittels des Begriffs einer gewissen Art von Rechenoperationen, definiert werden, nämlich als das Ergebnis der Addition einer unendlichen aber keine Perioden enthaltenden Reihe von Brüchen, deren Nenner der Reihe nach 10^0, 10^1, 10^2 u. s. w. sind, und deren Zähler durch die Stellenzahl des Bruches in der Reihe oder durch die vorhergehenden nach irgend einem Gesetze bestimmt ist.

Stellt man sich die natürlichen oder positiven ganzen Zahlen vor unter dem Bilde einer Reihe von Punkten, die auf einer geraden, etwa horizontal von links nach rechts laufenden Linie in gleichen Zwischenräumen auf einander folgen, so dass der auf den Punkt, der die Zahl 1 repräsentiert, folgende die Zahl 2 repräsentiert, der nächste die Zahl 3 u. s. w., so wird die Null repräsentiert durch den in der entgegengesetzten Richtung, also von rechts nach links, auf den Punkt 1 folgenden Punkt, die Zahl — 1 durch den in derselben Richtung auf den Nullpunkt folgenden u. s. w. Jede gebrochene Zahl findet ihre Darstellung in einem der Punkte, die zwischen den die ganzen Zahlen darstellenden liegen. Und zwar enthält jede Strecke der Linie, wie klein sie auch sei, unendlich viele Punkte, welche gebrochenen Zahlen entsprechen, es giebt nicht zwei gebrochenen Zahlen entsprechende Punkte in ihr, zwischen denen nicht unendlich viele von derselben Bedeutung lägen, die Linie unterbricht also an keiner Stelle ihr Darstellen rationaler Zahlen, und mithin kann die Gesamtheit der rationalen Zahlen nicht durch eine Reihe isolierter Punkte, sondern nur durch eine kontinuierliche Linie dargestellt werden. Gleichwohl schieben sich noch zwischen die ra-

tionalen Zahlen entsprechenden Punkte unendlich viele andere ein, nämlich die Repräsentanten der irrationalen Zahlen. Konstruiert man z. B. ein Quadrat, dessen Seite den Abständen der die ganzen Zahlen repräsentierenden Punkte gleich ist, und trägt die Diagonale desselben wiederholt vom Nullpunkte aus nach beiden Richtungen ab, so repräsentieren die durch diese Abtragungen bestimmten Punkte die Zahlen $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, $-2\sqrt{2}$ u. s. w. Oder wenn ein Kreis, dessen Radius gleich den Abständen der Punkte für die ganzen Zahlen ist, auf der Zahlenlinie in der Richtung von links nach rechts abrollt, so trifft der zuerst mit dem Nullpunkte zusammenfallende Punkt des Kreises die Zahlenlinie nach der ersten Abrollung im Punkte 2π, nach der zweiten im Punkte 4π u. s. w. Auch die Gesamtheit der irrationalen Zahlen kann nicht durch eine Reihe isolierter Punkte, sondern nur durch eine kontinuierliche Linie und zwar dieselbe, welche ununterbrochen rationale Zahlen darstellt, dargestellt werden, denn es giebt nicht zwei rationale Zahlen, deren Differenz so klein wäre, dass nicht unendlich viele irrationale Zahlen zwischen ihnen ständen. Um die Möglichkeit einzusehen, dass die Linie, welche ununterbrochen rationale Zahlen darstellt, zugleich ununterbrochen irrationale darstellt, muss man bedenken, dass der Zusammenhang einer Linie nur durch die Hinwegnahme einer Strecke, nicht aber durch die Hinwegnahme von Punkten aus ihr unterbrochen werden kann.

Wie nicht alle irrationalen Zahlen Ergebnisse einer Radizierung $\sqrt[b]{a}$ mit solchen rationalen Zahlen a und b sind, die der Bedingung dafür, dass das Ergebnis wieder eine rationale Zahl sei (der Bedingung, dass es eine rationale Zahl c gebe, durch deren Erhebung auf die bte Potenz man a erhalte), nicht genügen, so haben auch umgekehrt, wie schon angedeutet wurde, nicht alle Radizierungen mit Zahlen, die jener Bedingung nicht entsprechen, eine irrationale zum Ergebnisse. Ausgenommen sind nämlich diejenigen, die zum Exponenten b eine gerade und zum Radicanden a eine negative Zahl haben. Denn es giebt nicht bloss keine rationale, sondern auch keine irrationale Zahl c, weder eine positive noch eine negative, durch deren Erhebung auf die bte Potenz man, wenn b eine gerade Zahl ist, eine negative Zahl a erhielte. Wenn wir demnach voraussetzen, dass doch auch die Radizierungen dieser Art überhaupt ausführbar seien, und be-

stimmen, dass auch ihre Ergebnisse Zahlen genannt werden sollen, so erweitern wir den Zahlbegriff zum vierten Male, indem wir den teils rationalen teils irrationalen als den reellen die imaginären hinzufügen. Statt als Zahlen von der Form $\sqrt[2b]{-a}$ (wo b eine ganze und a eine positive Zahl bedeutet) kann man die imaginären Zahlen auch als solche von der Form $p+qi$ definieren, wenn p irgend eine reelle Zahl einschliesslich der Null, q irgend eine reelle Zahl ausschliesslich der Null und i dasselbe wie $\sqrt{-1}$ bedeutet. Denn man hat

$$\sqrt[2b]{-a}=\sqrt[2b]{a}\,\sqrt[2b]{-1}=\sqrt[2b]{a}\cos\frac{2k+1}{2b}\pi+i\sqrt[2b]{a}\sin\frac{2k+1}{2b}\pi,$$

wenn unter k eine beliebige von den ganzen Zahlen, die nicht kleiner als Null und nicht grösser als $2b-1$ sind, verstanden wird, die Zahlen $\sqrt[2b]{a}\cos\frac{2k+1}{2b}\pi$ und $\sqrt[2b]{a}\sin\frac{2k+1}{2b}\pi$ sind aber, da $\operatorname{tang}\frac{2k+1}{2b}$ nach der angegebenen Bedeutung der Buchstaben k und b jeden reellen Wert zwischen $+\infty$ und $-\infty$ annehmen kann, unabhängig von einander, und die erste kann daher mit p, die zweite mit q bezeichnet werden. An diese Definition schliesst sich sofort die Unterscheidung der rein oder einfach imaginären Zahlen, deren Begriff durch die Bestimmung $p=0$, und der komplexen, deren Begriff durch die Bestimmung $p\lessgtr 0$ definiert wird.

Vergleicht man die Reihe der ganzen Zahlen mit einer Reihe äquidistanter in einer geraden Linie liegender Punkte, so entspricht keiner imaginären Zahl ein Punkt, der zwischen den die ganzen Zahlen repräsentierenden läge. Denn jeder so gelegene Punkt entspricht einer reellen Zahl. Man kann aber die einfach imaginären Zahlen, wenn man $0i=0$ hinzufügt, für sich in derselben Weise wie die reellen durch die Punkte einer geraden Linie darstellen, indem man von dem zum Repräsentanten der Null bestimmten Punkte aus nach beiden Richtungen in den für die Repräsentanten der ganzen Zahlen auf der reellen Zahlenlinie gewählten Abständen Punkte markiert, die in der einen Richtung auf einander folgenden mit $+i$, $+2i$ usw., die in der anderen Richtung auf einander folgenden mit $-i$, $-2i$ usw. und jeden dazwischen liegenden mit einer Zahl, die das Produkt von i und

einer gebrochenen oder einer irrationalen ist, z. B. $\frac{1}{2}i$, $\sqrt{2}i$, πi, bezeichnet. Lässt man dann, nach der zuerst von GAUSS gegebenen Anweisung die Linie der reellen und die der imaginären Zahlen sich rechtwinkelig in ihren Nullpunkten schneiden, so bedeutet jeder ausserhalb der beiden Linien in ihrer Ebene liegende Punkt eine komplexe Zahl, und findet umgekehrt jede komplexe in einem Punkte dieser Ebene ihre Darstellung, z. B. die Zahl $3-2i$ in dem Durchschnittspunkte der Linie, die auf der reellen Zahlenlinie im Punkte 3, und derjenigen, die auf der imaginären im Punkte $-2i$ senkrecht steht. Man kann auch jeden eine komplexe Zahl $p+qi$ bedeutenden Punkt als einen Punkt einer Linie AC auffassen, die durch den Durchschnittspunkt A der reellen Zahlenlinie AR und der imaginären AI hindurchgeht. Denkt man sich alle möglichen Linien dieser Art gezogen, so stellt jede derselben eine kontinuierliche Reihe komplexer Zahlen dar, die in dem Werte des Verhältnisses $p:q$ übereinstimmen. Wenn man ferner die Entfernung des Punktes $p+qi$ vom Punkte A, die als positiv oder negativ zu betrachten ist, je nachdem q positiv oder negativ ist, mit ϱ, und den Winkel, den derjenige Teil der die Strecke ϱ enthaltenden Linie AC, welcher oberhalb der reellen Zahlenlinie AR (also auf der Seite des positiven Teils der imaginären Zahlenlinie AJ) liegt, mit dem positiven Teile von AR macht, mit φ bezeichnet, so ist $p=\varrho\cos\varphi$ und $q=\varrho\sin\varphi$, und der Punkt $p+qi$ kann daher auch mit $\varrho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ bezeichnet werden. Hieraus folgt, dass der um die Strecke $\varrho=1$ von A entfernte Punkt der Linie AC die komplexe Zahl $\cos\varphi+i\sin\varphi$ darstellt, dass diese Zahl also für die durch die Linie AC dargestellte Reihe komplexer Zahlen dieselbe Bedeutung hat wie die Zahl 1 für die Reihe der reellen und die Zahl i für die Reihe der einfach imaginären, und daher als die Einheit jener Reihe komplexer Zahlen bezeichnet werden kann, ferner dass eine Zahl $\varrho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ als positiv oder negativ, als ganz oder gebrochen, als rational oder irrational zu betrachten ist, je nachdem ϱ positiv oder negativ, ganz oder gebrochen, rational oder irrational ist.

Jede imaginäre Zahl $\sqrt[2b]{-a}$ hat die Eigenschaft, dass man durch ihre Erhebung auf die (2b)te Potenz eine so beschaffene reelle Zahl $(-a)$ erhält, wie man sie nicht erhalten kann, wenn man

dieselbe Rechenoperation (Erhebung auf die (2b)te Potenz) auf eine reelle Zahl anwendet, nämlich eine negative. Bedeutet also $\varphi(a)$ das Ergebnis einer an einer reellen Zahl a vorgenommenen reellen, d. h. selbst wieder nur durch reelle Zahlen bestimmten Rechenoperation φ, und ψ die inverse d. h. von $\varphi(a)$ zu a zurückführende, so dass $\psi[\varphi(a)] = a$ ist, so ist jede imaginäre Zahl eine Zahl $\varphi(a)$ von der besonderen Beschaffenheit, dass man durch Anwendung der Operation ψ auf sie eine Zahl a erhält, die man nicht durch Anwendung derselben Operation ψ auf eine reelle Zahl erhalten kann. Es könnte nun vermutet werden, dass es noch andere Zahlen $\varphi(a)$ von dieser besonderen Beschaffenheit gebe als die imaginären, dass also das Gebiet der nicht-reellen Zahlen noch andere als die imaginären in sich fasse. In der That giebt es noch andere Rechenoperationen als das Radicieren, welche eine Zahl $\varphi(a)$ von jener besonderen Beschaffenheit zum Ergebnisse haben. Aber von allen nicht reellen Zahlen, die uns die Arithmetik als Ergebnisse solcher Operationen kennen lehrt, zeigt sie auch, dass sie sich auf die Form $p + qi$ bringen lassen, also zu den imaginären gehören. Da z. B. $\text{num}\log_b a = a$ ist, so ist $\log_b a$ jedenfalls dann keine reelle Zahl, wenn a und b so beschaffen sind, dass für die Basis b der Numerus keiner reellen Zahl eine Zahl von der Art a sein kann, (ein Fall, der bekanntlich vorliegt, wenn b positiv z. B. 10 und a negativ ist), oder, um dies noch anders auszudrücken: da $b^{\log_b a} = a$ ist, so ist $\log_b a$ jedenfalls dann keine reelle Zahl, wenn die Zahlen a und b so beschaffen sind, dass der Gleichung $b^x = a$ kein reeller Wert von x genügen kann. Aber die nicht-reellen Logarithmen können auf die Form $p + qi$ gebracht werden und kommen also nicht zu den imaginären als eine neue Art von Zahlen hinzu. Ebenso lässt sich (um noch ein zweites Beispiel hinzuzufügen) von der Zahl $\arcsin 2$, die nicht reell ist, da $\sin(\arcsin 2)$ gleich 2 ist, während der Sinus jeder reellen Zahl zwischen $+1$ und -1 liegt, zeigen, dass sie imaginär ist.

Die Arithmetik hat bis jetzt überhaupt keine Rechenoperationen gefunden, die, an reellen Zahlen vorgenommen, zu einem Ergebnisse führen könnten, das sich nicht (wenn die Bedeutung der Buchstaben p und q dahin festgestellt wird, dass nicht bloss p sondern auch q gleich Null gesetzt werden dürfe) auf die Form

p + qi zurückführen liesse, also entweder reell oder imaginär wäre. Und auch, dass sie an imaginären Zahlen vorgenommen wieder zu Zahlen von der Form p + qi führen, zeigt sie von allen Rechenoperationen, denen sie bisher ihre Aufmerksamkeit zugewandt hat. Es darf aber wohl angenommen werden, dass, wenn es überhaupt eine Rechenoperation gäbe, die Ergebnisse anderer Art haben könnte, die Arithmetik sie längst entdeckt haben würde. Und dann haben wir das Recht zu schliessen, dass mit der zu den reellen Zahlen die imaginären fügenden die Reihe derjenigen möglichen Erweiterungen des ursprünglichen Zahlbegriffs abgeschlossen ist, denen es gemeinsam ist, dass die durch sie eingeführten neuen Zahlen Ergebnisse einfacher oder zusammengesetzter Rechenoperationen mit natürlichen Zahlen sein sollen. Man kann nun allerdings mit dem in der beschriebenen Weise viermal erweiterten Zahlbegriffe noch Erweiterungen anderer Art vornehmen. So kann man den Begriff einer Zahl bilden, die so beschaffen sei, dass man durch Anwendung einer gewissen Rechenoperation auf sie eine andere Zahl erhalte, als man erhalten müsste, wenn sie reell oder imaginär wäre, z. B. den Begriff einer Zahl, die einerseits nicht gleich Null sei, und durch deren Multiplikation mit sich selbst andererseits man Null erhalte ($\varepsilon > 0$ oder $\varepsilon < 0$ und $\varepsilon^2 = 0$). Derartige Erweiterungen des Zahlbegriffes braucht indessen die gegenwärtige Untersuchung nicht zu berücksichtigen, wenn sie sich auch nicht anmasst, den Nutzen, den ihnen viele Mathematiker für den Fortschritt ihrer Wissenschaft zuschreiben, zu bestreiten. Denn nur auf diejenigen Zahlen, auf welche das Rechnen mit natürlichen Zahlen nach den bekannten, aus dem Begriffe der natürlichen Zahl folgenden Regeln führt, konnte sich die Vermutung beziehen, die uns veranlasste, von der Erweiterung des Zahlbegriffes zu handeln, die Vermutung, dass es noch andere Arten von Quantis geben möge als diejenigen, deren Quantität durch eine reelle positive und ganze Zahl bestimmt werden könne.

3. Gegen die ganze Erweiterung des ursprünglichen Zahlbegriffes, die das Ergebnis der vorstehenden Betrachtungen sein würde, könnte ein Einwand rein logischen Inhaltes erhoben werden. Fassen wir nämlich alle Zahlen, welche wir denjenigen, die den Gegenstand des ursprünglichen Zahlbegriffes bilden, den natürlichen, zur Seite gestellt haben, die negativen, die gebrochenen,

die irrationalen und die imaginären, unter dem Namen der künstlichen zusammen, so würde das den künstlichen Zahlen Gemeinsame, welches die Definition dieses Begriffes anzugeben hätte, darin bestehen, dass sie nicht zu den natürlichen Zahlen gehörende Ergebnisse einfacher oder zusammengesetzter Rechenoperationen mit natürlichen Zahlen wären. Wenn nun der von der Definition des Begriffes der künstlichen Zahl benutzte Begriff der natürlichen seinerseits (wie dies oben geschah) definiert wird als der Begriff dessen, wodurch sich eine Anzahl oder Menge von Dingen als solche von einer anderen unterscheide, oder dessen, worin die Bestimmtheit einer Anzahl als solcher bestehe, so scheinen die Begriffe der natürlichen und der künstlichen Zahl nichts zu enthalten, was allen Zahlen überhaupt gemeinsam wäre und also zur Definition des Begriffs der Zahl überhaupt dienen könnte, und dann hätten wir durch die Annahme künstlicher Zahlen nicht den ursprünglichen Zahlbegriff erweitert, sondern nur der ursprünglichen Bedeutung des Wortes Zahl eine zweite zur Seite gestellt. Dieser Einwand übersieht indessen, dass die Eigenschaft, Ergebnis einer Rechenoperation mit natürlichen Zahlen zu sein, nicht bloss allen künstlichen, sondern auch allen natürlichen Zahlen zukommt, da man ja jede natürliche Zahl a z. B. durch Multiplikation ihrer selbst mit 1 oder durch Subtraktion der Zahl 1 von $a+1$ oder durch Halbierung von $2a$ erhalten kann. Definiert man den allgemeinen Begriff der Zahl überhaupt durch diese allen Zahlen gemeinsame Eigenschaft, so setzt man freilich wieder, wie bei der Definition des Begriffs der künstlichen Zahl, den besonderen der natürlichen und weiter den der Rechenoperation mit natürlichen Zahlen voraus, aber die Logik verbietet ebensowenig, den Begriff einer Gattung mittels desjenigen einer ihrer Arten, wie den Begriff einer Art mittels desjenigen einer ihr nebengeordneten Art zu bestimmen.

Während sich das Bedenken, zu welchem in rein logischer Hinsicht die versuchten Erweiterungen des Zahlbegriffs Anlass zu geben schienen, als unbegründet erweist, lässt sich die Richtigkeit einer arithmetischen Erwägung, die ihnen entgegentritt, nicht bestreiten. Jede von jenen Erweiterungen nämlich setzt von einer gewissen Rechenoperation, die, wenn sie auf eine natürliche Zahl angewendet werden soll, nur unter einer gewissen Bedingung wieder eine natürliche Zahl zum Ergebnisse haben kann, voraus,

dass sie doch auch dann, wenn jene Bedingung nicht erfüllt sei, überhaupt ein Ergebnis haben, überhaupt ausgeführt werden könne. Es liegt aber auf der Hand, dass nur in einem einzigen Falle eine Rechenoperation mit natürlichen, der Bedingung dafür, dass das Facit wieder eine natürliche Zahl sei, nicht entsprechenden Zahlen überhaupt ein Facit hat, nämlich in dem Falle der Subtraktion einer natürlichen Zahl von sich selbst, und dass also durch die Definition, nach der die Ergebnisse aller mit natürlichen Zahlen vorgenommenen Rechenoperationen unter den Begriff der Zahl fallen, die ursprüngliche Zahlenreihe nur um ein einziges Glied, die Null, vermehrt wird. Die Subtraktion einer Zahl b von einer kleineren Zahl a hat nicht nur keine natürliche Zahl zum Ergebnisse, sondern ist überhaupt unausführbar, und ebenso ist es unmöglich, eine Zahl a durch eine Zahl b, von der sie nicht ein ganzes Vielfaches ist, überhaupt zu dividieren, und in dem Falle, dass es keine natürliche Zahl c giebt, deren bte Potenz a ist, die bte Wurzel aus a zu ziehen. Setzt man $3 - 5 = -2$, so ist dies keine Ausführung der Subtraktion $3 - 5$, sondern nur ihre Ersetzung durch eine andere, nämlich $0 - 2$, die nicht ausgeführt werden kann, denn -2 ist nur eine kürzere Bezeichnung für $0 - 2$. Wer auf die Frage, wie viel $12 : 5$ sei, antwortet $2^2/_5$, hat die Aufgabe, 12 durch 5 zu dividieren, in die beiden 10 und 2 durch 5 zu dividieren, zerlegt und die erste dieser beiden gelöst, die zweite aber nur wiederholt, denn $2 : 5$ und $^2/_5$ sind nur verschiedene Bezeichnungen desselbigen. Wird eine Quadratwurzel einem unendlichen Dezimalbruche gleichgesetzt, so wird damit nur gesagt, dass man, um die gesuchte Zahl zu finden, eine unendliche Reihe von Divisionen, deren jede unmöglich ist, ausführen und dann die unendlich vielen Quotienten addieren müsse. Das Zeichen $\sqrt{-1}$ oder i beantwortet nicht die Frage nach der Grösse der Quadratwurzel aus -1, sondern bezeichnet nur entweder die Aufgabe, diese Grösse zu ermitteln, oder die unbekannte Lösung derselben. Wenn wir demnach die Null aus der Reihe der künstlichen Zahlen in die der natürlichen versetzen (was nur eine Sache der Terminologie ist), so sind alle künstlichen Zahlen Ergebnisse unausführbarer Rechenoperationen, bloss fingierte Ergebnisse, der Begriff der künstlichen Zahl enthält also einen Widerspruch, und mit ihm der Versuch, durch eine Erweiterung des Zahlbegriffs

die negativen, die gebrochenen, die irrationalen und die imaginären Zahlen in seinen Umfang hineinzuziehen.

Wir rechnen aber doch nicht bloss mit natürlichen, sondern auch mit künstlichen Zahlen, und sind dabei sicher, dass wir, so lange wir nicht gegen die Regeln verstossen, die sie selbst vorschreiben, uns nicht in Widersprüche verwickeln und überhaupt nicht irren können. Wie ist das möglich? Wie können wir durch Denken in sich widersprechenden Begriffen zu Erkenntnissen gelangen?

Der Beantwortung dieser Frage muss ich eine zunächst die natürlichen Zahlen betreffende, dann aber auch auf die künstlichen sich übertragende Unterscheidung voranschicken, die Unterscheidung von Zahlen im objektiven und von Zahlen im subjektiven Sinne, — ich würde sagen von reellen und ideellen Zahlen, wenn das Beiwort Reell nicht schon in einem anderen Sinne, zur Bezeichnung des Gegensatzes zu Imaginär, von der Arithmetik verwendet wäre. Unter einer natürlichen Zahl im objektiven Sinne verstehe ich das, was ich bisher einfach als natürliche Zahl bezeichnet habe: das, worin die Bestimmtheit einer Anzahl oder Menge von Dingen als solcher besteht, als etwas in dieser Anzahl Vorhandenes, an ihrem wirklichen Dasein, ihrer Realität, Teilhabendes, — unter einer natürlichen Zahl im subjektiven Sinne das, was wir in dem Begriffe, der eine natürliche Zahl im objektiven Sinne zum Inhalt hat, denken, als Begriffsinhalt, als Vorgestelltes oder Gedachtes oder Ideelles, also etwas, was eine Bestimmtheit, nicht der gezählten Anzahl von Dingen, sondern des diese Anzahl in ihrer Bestimmtheit erfassenden Denkens ist. Die natürlichen Zahlen im objektiven und die natürlichen Zahlen im subjektiven Sinne sind hiernach nicht zwei Arten der Gattung Zahl, denn sie haben, so eng auch die zwischen ihren Begriffen bestehende Beziehung ist, doch nichts Gemeinsames, worin das Wesen einer Gattung, zu der sie sich als Arten verhielten, bestehen könnte. Nicht um die Unterscheidung zweier Arten von Zahlen handelt es sich, sondern um die zweier Bedeutungen des Wortes Zahl, die allerdings durch eine enge sachliche Beziehung zusammenhängen. Unterscheiden wir nun weiter in derselben Weise auch künstliche Zahlen im objektiven und solche im subjektiven Sinne, so enthält der Begriff der künstlichen Zahl im objektiven Sinne einen Widerspruch, denn die künstlichen Zahlen

im objektiven Sinne sind dieselben, die oben einfach als künstliche Zahlen bezeichnet wurden, also Ergebnisse ergebnisloser Rechenoperationen. Dagegen der Begriff der künstlichen Zahl im subjektiven Sinne ist frei von diesem Widerspruche. Denn was wir durch ihn denken, sind nicht Ergebnisse ergebnisloser Rechenoperationen selbst, sondern Fiktionen solcher Ergebnisse, oder solche Ergebnisse nicht an sich, sondern als fingierte. Da wir z. B., wenn wir den sich widersprechenden Begriff des Ergebnisses der Subtraktion einer Zahl von einer kleineren bilden, doch eben wirklich diesen Begriff denken, also wirklich ein solches Ergebnis fingieren, muss zugestanden werden, dass, wenn auch ein solches Ergebnis selbst unmöglich ist, doch seine Fiktion wirklich und also auch möglich ist, und dass mithin der Begriff des fingierten Ergebnisses der Subtraktion einer Zahl von einer kleineren als eines fingierten keinen Widerspruch enthält, dieser widerspruchslose Begriff aber ist der der negativen Zahl im subjektiven Sinne.

Um die Möglichkeit, dass wir durch Rechnen mit künstlichen Zahlen zu Erkenntnissen gelangen, obwohl der Begriff jeder künstlichen Zahl im objektiven Sinne einen Widerspruch enthält, zu verstehen, braucht man jetzt nur noch zu bemerken, dass die Begriffe, in denen wir denken, wenn wir rechnen, sämtlich Begriffe von Zahlen im subjektiven Sinne, also, da der Begriff einer künstlichen Zahl nur dann, wenn er im objektiven Sinne genommen wird, sich widerspricht, widerspruchslose Begriffe sind. Wenn man m. a. W. in dem Ausdrucke „mit gewissen Zahlen rechnen“ unter den Zahlen, mit denen gerechnet wird, nicht Objekte, deren Begriffe, sondern solche, die wir selbst im rechnenden Denken betrachten und zu einander in Beziehung setzen, versteht, so sind alle Zahlen, mit denen wir rechnen, Zahlen im subjektiven Sinne, also Zahlen, deren Begriff keinen Widerspruch enthält, mögliche Zahlen. Alles Rechnen nämlich ist offenbar ein Erkennen aus Begriffen. Dass z. B. $4+3=7$ ist, d. h. dass, wo wir auch immer eine Vierzahl von Dingen und eine Dreizahl von Dingen zusammenfassen, das Ergebnis eine Siebenzahl von Dingen ist, gleichviel, welcher Art die betreffenden Dinge seien, erkennen wir nicht durch Beobachtung dessen, was thatsächlich eintritt, wenn von uns wahrgenommene Mengen von Dingen vereinigt werden (sowie wir beobachten, dass durch Mischung eines gelben

und eines blauen Pulvers ein grünes entsteht), sondern, ohne irgend etwas vorauszusetzen, durch blosse Betrachtung unserer Vorstellungen oder Begriffe der Vierzahl und der Dreizahl von Dingen und der von diesen abstrahierten Begriffe der objektiven Zahlen 4 und 3 als der Begriffe von dem, wodurch sich die Vierzahl und die Dreizahl von anderen Anzahlen unterscheiden. Wir brauchen, um zu sehen, dass das Urteil $4+3=7$ gilt und zwar notwendig und allgemein gilt, auf nichts anderes unsere Aufmerksamkeit zu richten als auf unsere Begriffe der objektiven Zahlen 4 und 3 hinsichtlich dessen, was wir durch sie denken. Unser Geist beschäftigt sich dabei nur mit dem, was er in sich selbst findet. Nichts anderes aber als dieses, dass alles Rechnen ein Erkennen aus Begriffen objektiver Zahlen sei, ist der Sinn der Behauptung, dass die Zahlen, mit denen wir rechnen, stets Zahlen im subjektiven Sinne seien. Hat man durch Rechnen mit subjektiven natürlichen Zahlen wieder eine subjektive natürliche Zahl erhalten, so kann man der dieses Ergebnis ausdrückenden Gleichung, z. B. der Gleichung $4+3=7$, die Bedeutung einer Aussage über eine Beziehung zwischen objektiven Zahlen beilegen, sowie man, nachdem man aus dem Begriffe des gleichseitigen Dreiecks erkannt hat, dass er mit dem des gleichwinkeligen dem Gegenstande nach identisch ist, von den gleichseitigen Dreiecken selbst, den objektiven, aussagen kann, dass sie notwendig gleichwinkelig seien. Aber wie man zu dieser die objektiven gleichseitigen Dreiecke betreffenden Erkenntnis nur mittels der ihren Begriff oder, was dasselbe ist, der die subjektiven gleichseitigen Dreiecke betreffenden gelangen kann, so auch zu der Erkenntnis, dass allgemein und notwendig die Vereinigung von vier Dingen und von drei Dingen aus sieben Dingen bestehe, nur mittels derjenigen, dass der aus den Begriffen der objektiven Zahlen 4 und 3 gebildete Begriff der Summen dieser Zahlen mit dem Begriffe der objektiven Zahl 7 identisch sei.

Die Unterscheidung objektiver und subjektiver Zahlen hat, wie man ohne weiteres sieht, für die gegenwärtige Untersuchung noch die weitere Bedeutung, dass sie alle die Erweiterungen, die sich in Beziehung auf den Begriff der objektiven Zahl als unzulässig erwiesen, auf den der subjektiven zu beziehen gestattet.

4. Zu den Begriffen, welche die Arithmetik mit dem Worte Zahl bezeichnet, gehören ausser den im Vorstehenden erörterten

noch zwei, die von der Untersuchung der zulässigen und für die Arithmetik unentbehrlichen Erweiterungen des Begriffs der Zahl nicht ausser acht gelassen werden dürfen: die Begriffe der unendlich grossen und der unendlich kleinen Zahl.

Wird der Begriff der unendlich grossen Zahl definiert als derjenige einer Zahl, welche dem absoluten Werte nach grösser sei, als jede andere überhaupt hinsichtlich der Grösse mit ihr vergleichbare, die genannt werden möge, so kann er nicht bloss auf die Reihe der reellen, sondern auch auf die der einfach imaginären Zahlen und auch auf jede der unendlich vielen Reihen, in welche sich in der oben angegebenen Weise die komplexen Zahlen ordnen lassen, bezogen werden. Und zwar entsprechen jeder dieser unendlich vielen Reihen zwei unendlich grosse Zahlen, eine positive und eine negative. Wird also überhaupt der Begriff der unendlich grossen Zahl zugelassen, so fasst er unendlich viele Begriffe unter sich, die Begriffe $+\infty, -\infty, +\infty i, -\infty i$ und alle diejenigen, die man erhält, wenn man in den Ausdrücken $+\infty(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ und $-\infty(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ die unbestimmte Zahl φ alle Werte von o bis π durchlaufen lässt. Zwei unendlich grosse Zahlen, die sich auf verschiedene Zahlenreihen beziehen, sind ebenso wie zwei endliche zu verschiedenen Reihen gehörende hinsichtlich der Grösse unvergleichbar. Wie z. B. 4 und 3 i und $5(\cos 2 + i\sin 2)$, so stehen auch ∞, ∞i und $\infty(\cos 2 + i\sin 2)$ in gar keinem Grössenverhältnisse. Es hätte gar keinen Sinn, von einer jener drei endlichen oder von einer dieser drei unendlichen Zahlen zu sagen, sie sei grösser oder sie sei kleiner, als die beiden anderen, oder stehe zwischen ihnen. In Beziehung auf dieselbe Zahlenreihe giebt es nicht mehr als Eine positive und Eine negative Zahl von unendlicher Grösse. Denn zwei unendlich grosse, sich auf dieselbe Zahlenreihe beziehende Zahlen von gleichen Vorzeichen könnten sich nur durch ihre Grösse unterscheiden; aber auch das ist unmöglich, da keine Rechenoperation mit endlichen Zahlen, weder die ohne Ende fortgesetzte Addition $1 + 1 + 1 + \ldots$ noch die Division irgend einer Zahl durch Null noch irgend eine andere, zu einer unendlich grossen Zahl führt, deren Grösse sie noch durch ein weiteres Prädikat als das der Unendlichkeit überhaupt bestimmte. Darum kann man auch nicht von einer unendlich grossen Zahl zu einer noch grösseren dadurch gelangen, dass man zu ihr eine endliche Zahl oder sie selbst addiert, und nicht

zu einer kleineren dadurch, dass man eine endliche Zahl von ihr subtrahiert, während als Ergebnis der Subtraktion einer unendlich grossen Zahl von sich selbst jede beliebige Zahl, sie selbst nicht ausgeschlossen, angegeben werden kann. Es mag noch auf die Folgerung hingewiesen werden, dass die unendlich grossen Zahlen ausserhalb des Gebietes der Gegensätze einerseits der ganzen und der gebrochenen, andererseits der rationalen und der irrationalen Zahlen liegen. Jede unendlich grosse Zahl ist entweder reell oder imaginär, und entweder positiv oder negativ, dagegen sowohl ganz als auch gebrochen, nämlich ganz, inwiefern sie die Summe unendlich vieler ganzer, und gebrochen, inwiefern sie die Summe unendlich vieler ganzer und einer gebrochenen Zahl ist, und sowohl rational als auch irrational in analoger Weise.

Keine unendlich grosse Zahl liegt selbst in der Zahlenreihe, auf die sie sich in der Weise bezieht, dass sie grösser als jedes von ihr verschiedene Glied derselben ist. Die Zahlenreihen, auf die sich unendlich grosse Zahlen beziehen, z. B. die alle reellen Zahlen von endlicher Grösse in sich fassende, setzen sich sämtlich sowohl in der positiven als auch in der negativen Richtung ohne Ende fort, aber eben deshalb enthält keine ein Glied, das zu erreichen man über alle anderen hinaus fortschreiten müsste. Welche positive oder negative, ganze oder gebrochene, rationale oder irrationale Zahl man auch aus einer jener Reihen herausgreifen mag, so ist sie von endlicher Grösse. Es giebt insbesondere in der endlosen reellen Zahlenreihe ebensowenig eine Zahl von unendlicher Grösse, wie in dem unendlichen Raume einen Punkt, dessen Entfernung von einem gegebenen Punkte unendlich gross wäre, oder in der unendlichen Zeit einen Punkt in der Richtung der Vergangenheit oder der Zukunft, der von dem Punkte der Gegenwart durch eine unendlich grosse Zeitstrecke getrennt wäre. Vorausgesetzt daher, dass die unendlich grossen Zahlen mit den endlichen nicht bloss den Namen Zahl gemeinsam haben, sondern sich mit ihnen in einen wirklichen Begriff zusammenfassen lassen, so kommt zu den bisher betrachteten Gegensätzen, die der allgemeine Begriff der Zahl umschliesst, den Gegensätzen der reellen und der imaginären, der positiven und der negativen, der geraden und der gebrochenen, der rationalen und der irrationalen Zahlen, derjenige der endlich und der unendlich grossen als ein neuer hinzu. Einer Änderung der Definition des

Zahlbegriffes, die den Abschluss der früheren Betrachtungen bildete, würde es aber darum doch nicht bedürfen. Denn auch die unendlich grossen Zahlen sind Ergebnisse von Rechenoperationen mit natürlichen Zahlen, z. B. $+\infty$ dasjenige der ohne Ende wiederholten Addition von 1 zu irgend einer reellen Zahl, oder der Division einer reellen Zahl durch Null, oder der mit $-\log 0$ bezeichneten Operation. Es bedarf daher auch keines Beweises der Voraussetzung mehr, dass sich überhaupt die unendlich grossen Zahlen mit den endlichen in einen Begriff zusammenfassen lassen.

Eine endlose Reihe von Additionen ist unausführbar, und dasselbe gilt von allen anderen Rechenoperationen, deren Ergebnis mit dem der endlosen Addition $1+1+1+\ldots$ identisch sein müsste, z. B. von dem Dividieren mit Null. Die unendlich grossen Zahlen gehören daher zu denjenigen, deren Begriff sich widerspricht, wenn das Wort Zahl im objektiven Sinne genommen wird. Wie alle anderen künstlichen Zahlen, ausgenommen die Null, sind sie Objekte widerspruchsloser Begriffe nur als Zahlen im subjektiven Sinne, also nur dann, wenn man unter einer unendlich grossen Zahl nicht das Ergebnis einer gewissen Rechenoperation selbst, sondern die Fiktion eines solchen Ergebnisses versteht.

Wir können uns aber doch, wird man einwenden, Mengen denken, die aus unendlich vielen Dingen, also aus Dingen, deren Zahl unendlich gross ist, bestehen. Es ist z. B. mindestens möglich, dass die Menge der überhaupt existierenden Atome oder der Seelen oder der Weltkörper, und gewiss, dass die der Punkte irgend einer Linie oder irgend einer Zeitstrecke von dieser Art sei. Inwiefern aber die Zahl ∞ die Bestimmtheit oder Grösse einer Menge ist, ist sie etwas zu dieser Menge Gehörendes, in ihr Vorhandenes, an ihrem Dasein Teilhabendes, und nichts anderes als eben dieses ist der Sinn der Behauptung, dass sie als Zahl im objektiven Sinne wirklich und mithin auch möglich sei. Wäre die Zahl ∞ nur eine Zahl im subjektiven Sinne, also eine blosse Fiktion, so dächten wir auch in dem Begriffe der Bestimmtheit einer unendlichen Menge oder ihrer Grösse und mithin auch in demjenigen der unendlichen Menge selbst nur eine Fiktion, die selbst zwar etwas Wirkliches, nämlich ein wirklicher Modus des Denkens, und mithin auch etwas Mögliches wäre, aber ihrerseits zum Gegenstande etwas Unmögliches und mithin auch

Unwirkliches hätte. Ich bin mit diesem Einwande darin einverstanden, dass kein Widerspruch darin liegt, wenn von gewissen Dingen, z. B. den Weltkörpern, gesagt wird, dass jede endliche Menge von ihnen ein Teil einer grösseren Menge sei, und dass also die Beschaffenheit der Welt dem Abzählen solcher Dinge keine Schranke setze. Auch habe ich nichts dagegen einzuwenden, wenn man diesem Gedanken den Ausdruck giebt, die Menge gewisser Dinge sei unendlich gross. Aber man darf diesem Ausdrucke keinen anderen Sinn beilegen als eben den negativen, dass die Gesamtheit gewisser Dinge überhaupt nicht durch den Begriff der Menge zusammengefasst werden könne. Sofern daher die Behauptung, dass eine aus unendlich vielen Dingen bestehende Menge möglich, dass dieser Begriff also nicht der Begriff von etwas bloss Fingiertem sei, so gemeint ist, dass aus ihr die Möglichkeit der Zahl ∞ im objektiven Sinne folgen würde, kann ich sie nicht zugeben. Schliesst der in Rede stehende Einwand von der Möglichkeit unendlicher Mengen auf diejenige der Zahl ∞ im objektiven Sinne, so schliesse ich umgekehrt aus der Unmöglichkeit der Zahl ∞ im objektiven Sinne, die ich darum behaupten zu dürfen glaube, weil wir im Begriffe dieser Zahl das Ergebnis einer ihrer Natur nach unausführbaren Rechenoperation denken, auf diejenige unendlicher Mengen, wofern unter einer Menge von Dingen ein aus Dingen Bestehendes verstanden wird, dessen Bestimmtheit die Zahl der es bildenden Dinge ist.

Der Widerspruch, das Ergebnis einer unmöglichen Rechenoperation zu sein, ist dem Begriffe der unendlich grossen Zahl mit demjenigen der negativen, der gebrochenen, der irrationalen und der imaginären gemein. Um es so evident als möglich zu machen, dass es nicht nur keine imaginäre und keine negative Zahl von unendlicher Grösse im objektiven Sinne geben, sondern dass auch keine zugleich positive und reelle diese Beschaffenheit haben kann, möchte ich jetzt noch einen Augenblick bei der besonderen Weise verweilen, in der sich der Begriff der Zahl $+\infty$ widerspricht. Dieselbe kann kurz mit den Worten beschrieben werden, dass dieser Begriff weder allgemein noch singulär, oder auch, dass er sowohl allgemein als auch singulär sei. Dass er nicht allgemein, wie z. B. derjenige der Zahl, die grösser als 10 ist, oder der geraden Zahl oder der Primzahl, sondern singulär ist, geht daraus hervor, dass, nachdem der durch die endlose

Addition 1 + 1... zu findenden oder einer durch irgend eine andere Beziehung bestimmten Zahl das Prädikat der unendlichen Grösse erteilt ist, nicht weiter gefragt werden kann, wie gross denn diese unendlich grosse Zahl sei. Wäre die unendliche Grösse ein allgemeines Prädikat, wie das Grössersein als 10, so müssten sich besondere Prädikate, in denen sie enthalten wäre, wie das Grössersein als 10 in dem 11-sein, Grössebestimmungen, durch die sich eine unendlich grosse Zahl von der anderen unterschiede, angeben lassen; das aber ist nicht der Fall. Dass auch das Gegenteil wahr ist, folgt daraus, dass eine unendliche Menge sich vermehren und sich vermindern kann und dass die vermehrte und die verminderte Menge einerseits wieder unendlich gross sind, andererseits sich von der ursprünglichen und von einander unterscheiden. Denn sind verschiedene Mengen von unendlicher Grösse möglich, so ist der Begriff der unendlichen Menge und mit ihm der der unendlich grossen Zahl nicht singulär, sondern allgemein. Denken wir uns z. B. eine nach allen Richtungen hin unendliche Ebene und auf jeder Seite derselben eine unendliche Menge von Weltkörpern, so ist die unendliche Menge der Weltkör perüberhaupt unendlich viel grösser, als jede der beiden durch die Ebene getrennten unendlichen Mengen, und wenn irgend eine Anzahl von Weltkörpern von der einen Seite der Ebene auf die andere hinüberträte, so nähme die unendliche Menge der auf der einen Seite befindlichen zu und die der auf der anderen Seite befindlichen ab; es sind also unendlich grosse Mengen von Weltkörpern möglich, die sich als unendlich grosse Mengen unterscheiden, also auch Zahlen, die sich zu der Zahl ∞ wie das Besondere zum Allgemeinen verhalten. Oder die Zahl der vergangenen und die der zukünftigen Jahre sind beide unendlich; da aber mit jedem Jahre die Zahl jener um Eins zu- und die Zahl dieser um Eins abnimmt, ohne dass eine von ihnen aufhörte, unendlich zu sein, so ist die unendliche Grösse eine vielen Zahlen gemeinsame, also eine allgemeine Beschaffenheit. —

Während die unendlich grossen Zahlen grösser sein sollen als jede, die man durch kontinuierliches Fortschreiten von irgend einer endlichen Zahl aus in der von der Null fortführenden Richtung ihrer Reihe erreichen könne, sollen die unendlich kleinen kleiner sein als alle durch kontinuierliches Fortschreiten in der der Null zuführenden Richtung vor der Null erreichbaren. Es

müssen also, wenn man den Begriff der unendlich kleinen Zahl überhaupt zulassen will, in Beziehung auf jede der unendlich vielen, durch gerade Linien, die sich in Einem Punkte schneiden, darstellbaren Zahlenreihen, wie zwei unendlich grosse, so auch zwei unendlich kleine Zahlen angenommen werden, eine positive und eine negative. Mehr als zwei kann es in Beziehung auf keine Reihe geben, denn wie das Unendlichgrosssein, so ist auch das Unendlichkleinsein ein Prädikat, das keine Besonderung mehr zulässt. Man kann freilich schliessen: wenn eine Zahl d unendlich klein im Vergleich mit allen endlichen Zahlen sei, so sei d^2 unendlich klein im Vergleich mit d, d^3 wieder unendlich klein im Vergleich mit d^2 usw., sowie ∞^2 unendlich gross im Vergleich mit ∞, ∞^3 wieder unendlich gross im Vergleich mit ∞^2 sei, aber die unendlich kleine Zahl einer höheren Ordnung unterscheidet sich doch in nichts von derjenigen der ersten Ordnung. Um einen Grössenunterschied zwischen d und d^2 behaupten zu dürfen, müsste man zuerst zeigen, wie sich überhaupt Gradunterschiede in dem Unendlichkleinsein denken liessen, und das könnte nur in der Weise geschehen, dass man diejenige Bestimmtheit einer Zahl d angäbe, die Jemand kennen müsste, bevor er urteilen könnte, d sei im Vergleich mit allen endlichen Zahlen unendlich klein.

Offenbar enthält die kontinuierliche Reihe der reellen Zahlen keine, die dem Begriffe der unendlich kleinen entspräche, und dasselbe gilt von den übrigen Reihen, die aber hier nicht weiter berücksichtigt zu werden brauchen. Denn jede der Reihe der reellen angehörende Zahl, die grösser als Null ist, ist auch grösser als unendlich viele andere, die grösser als Null sind, während eine unendlich kleine Zahl kleiner als jede von Null verschiedene sein soll. Wie es in einer Linie keinen Punkt giebt, der unmittelbar auf den Anfangspunkt folgt, sondern zwischen dem Anfangspunkte und jedem folgenden unendlich viele Punkte liegen, so giebt es auch in der reellen Zahlenreihe keine Zahl, die so klein wäre, dass nicht noch unendlich viele zwischen ihr und der Null ihre Stelle hätten, von denen keine so beschaffen ist, dass der Faktor, mit dem man sie multiplicieren müsste, um die Zahl 1 oder eine grössere zu erreichen, unendlich gross sein müsste.

Es giebt demnach ebensowenig wie unendlich grosse, unendlich kleine Zahlen im objektiven Sinne. Aber auch die Frage nach der Möglichkeit unendlich kleiner Zahlen im subjektiven

Sinne scheint mir verneint werden zu müssen. Denn unter allen Rechenoperationen, deren Begriff sich aus dem der natürlichen Zahl ableiten lässt, ist keine, die, wenn sie möglich wäre, zu einer Zahl führen müsste oder auch nur könnte, welche einerseits kleiner als alle von Null verschiedenen Zahlen und andererseits grösser als Null wäre. So ist z. B. der reciproke Wert von ∞ nicht unendlich klein, sondern gleich Null. Wenn Jemand daraus, dass $(1+1/a)^a = e$ wird für $a=\infty$, glaubte schliessen zu dürfen, $1/a$ werde für $a=\infty$ nicht Null, sondern unendlich klein, da, wenn man $1/a = 0$ setze, $(1+1/a)^a = 1^a = 1$ werde, so wäre zu erwidern: es sei nicht erlaubt, die Regeln, die für das Rechnen mit endlichen Zahlen gelten, ohne weiteres zur Ermittelung des Wertes einer Zahl x, die durch eine Beziehung zur Zahl ∞ bestimmt sei, anzuwenden, und so dürfe man, um den Wert $(1+1/\infty)^a = x$ zu finden, nicht zuerst $1+1/\infty$ für sich ausrechnen und dann das Facit auf die Potenz ∞ erheben, sondern man müsse zuerst die durch den Ausdruck $(1+1/a)^a = x$ bestimmte Beziehung der Zahl x zur Zahl a auf eine Form (nämlich

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1-\frac{1}{a}}{1.2}+\frac{\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{2}{a}\right)}{1.2.3}+\ldots$$

bringen, die es gestatte, vor der Ausrechnung $1/a = 0$ zu setzen, wenn $a=\infty$ gesetzt werde. Oder wenn man einen periodischen Dezimalbruch von der kleinsten derjenigen rationalen Zahlen, denen er mit jeder Stelle näher kommt, z. B. 0,999... von 1 subtrahiert, so erhält man nicht, wie es einen Augenblick scheinen könnte, eine unendlich kleine Zahl, sondern genau Null. Denn die Reihe der Additionen $9/10+9/100\ldots$ setzt sich über jede Summe, die kleiner als 1 ist, hinaus fort, ihr Ergebnis ist also grösser als jede Zahl, die kleiner als 1 ist, und da es auch nicht grösser als 1 sein kann, so ist es gleich 1. Dieser Schluss findet seine Bestätigung durch den aus der elementaren Arithmetik bekannten, dass von 0,999... das Zehnfache 9,999..., also das Neunfache $9{,}999\ldots - 0{,}999 = 9$, also der neunte Teil des Neunfachen 1 ist.

Es könnte nun von mir verlangt werden, zu zeigen, dass sich die Differential- und Integralrechnung nur scheinbar auf die Annahme unendlich kleiner Zahlen gründe. Ich glaube mich hierüber indessen um so mehr auf eine kurze Andeutung beschränken zu dürfen, als sich in den Arbeiten NEWTONS und LA-

GRANGES diese Annahme nicht findet, und die geschätztesten der neueren Lehrbücher sie in einer Weise einführen, die deutlich genug zu erkennen giebt, dass sie in ihr nicht einen Bestandteil der mathematischen Erkenntnis, sondern nur ein Mittel zur Vereinfachung des Ausdruckes erblicken. Man kann jeder Differentialgleichung eine Form geben, in der die Differentiale nur in Verbindung zu Differentialquotienten vorkommen. Auch von denjenigen, die zwei oder mehrere unabhängige Veränderliche enthalten, gilt dies. Denn $\varphi(x, y, z)\,dx + \psi(x, y, z)\,dy + \chi(x, y, z)dz = o$, die allgemeine Form der Differentialgleichungen erster Ordnung ersten Grades mit zwei unabhängigen Veränderlichen x und y, kann zunächst in $\varphi + \psi\, dy/dx + \chi\, dz/dx = o$ und weiter in $\varphi + \psi\, dy/\delta x + \chi\,(dz/\delta x + dz/dy\; dy/dx) = o$, wo dy/dx der Differentialquotient $f'(x)$ einer beliebigen Funktion $y = f(x)$ ist, umgeformt oder auch in die beiden $\varphi + \chi\, dz/dx = o$ und $\psi + \chi\, dz/dy = o$ zerlegt werden. Nun ist ein Differentialquotient nicht ein Bruch, dessen Zähler und Nenner unendlich kleine Zahlen wären, sondern die Zahl, der sich ein Differenzenquotient ohne Grenze nähert, wenn die unabhängige Differenz sich ohne Grenze der Null nähert, und diese Zahl ist, die Stetigkeit der Funktion, deren Differentialquotient sie ist, vorausgesetzt, für jeden Wert der unabhängigen Veränderlichen von endlicher Grösse. Mithin sind alle Differentialgleichungen Gleichungen, in denen nur endliche und ausnahmsweise unendlich grosse, aber niemals unendlich kleine Zahlen vorkommen. Die Symbole dx, dy usw. bezeichnen nach dieser Auffassung für sich allein gar nichts; Bezeichnungen sind nur die Symbole dy/dx, d^2y/dx^2 u. s. w., und zwar Bezeichnungen für endlich grosse, ausnahmsweise für unendlich grosse, niemals für unendlich kleine Zahlen. Man kann auch jede Differentialgleichung auffassen als die Verbindung der entsprechenden Differenzengleichung mit dem Urteile, dass die letztere, falls sie unrichtig sei, ohne Grenze der Richtigkeit näher komme, wenn man die unabhängige Differenz, bezw. die unabhängigen Differenzen, sich ohne Grenze der Null nähern lasse. Als blosse Gleichung betrachtet ist nach dieser Auffassung jede Differentialgleichung völlig identisch mit der entsprechenden Differenzengleichung, z. B. $\varphi(x, y)\,dx + \psi(x, y)\,dy = o$ mit $\varphi(x, y)\,\Delta x + \psi(x, y)\,\Delta y = o$, und als blosse Zahlen betrachtet sind die Differentiale völlig identisch mit den entsprechenden Differenzen; die Vertauschung der

Zeichen für die Differenzen mit denjenigen für die Differentialien zeigt nur das die Gleichung begleitende Urteil an, dass der etwa zwischen den beiden Seiten der Gleichung bestehende Grössenunterschied durch Verkleinerung des der unabhängigen Differenz gegebenen Wertes beliebig klein gemacht werden könne.

II.

5. Mit dem Begriffe der Zahl uns näher zu beschäftigen wurden wir veranlasst durch die Erwägung, dass nur die zugleich positiven und ganzen Zahlen Zahlen von Dingen und als solche mit dem, was wir die Grösse oder die Bestimmtheit einer Anzahl von Dingen nennen, identisch wären, dass aber doch auch die nicht zugleich positiven und ganzen Zahlen zu Grössebestimmungen geeignet schienen, und dass demnach, wenn es noch eine andere Weise, eine Grösse zu haben oder ein Quantum zu sein, geben sollte, als die den Anzahlen eigene, dieselbe wohl zu den nicht zugleich positiven und ganzen Zahlen in einer verwandten Beziehung stehen möchte, wie jene zu den zugleich positiven und ganzen.

Wenden wir uns nunmehr zu der Frage, ob in der That die künstlichen Zahlen die Grösse von etwas anderem als von Mengen zu bestimmen dienen, und fassen wir zunächst die negativen ganzen ins Auge, so müssen wir jedenfalls dabei bleiben, dass eine negative Zahl — a durch keine Benennung 𝔑 die Bedeutung einer Zahl von Dingen erhalten kann. Denn um welche Art von Dingen es sich auch handeln mag, so ist die Zahl einer Reihe von ihnen grösser als Null, also positiv. Aber wenn auch eine benannte Zahl — a 𝔑 nicht Zahl einer Anzahl von Dingen von der Art 𝔑 ist, so kann sie doch die Grösse einer Anzahl von Dingen einer anderen Art $\mathfrak{N}_1$ bestimmen. — a nämlich ist diejenige Zahl, deren Addition zu irgend einer Zahl b mit der Subtraktion der Zahl + a von b, und deren Subtraktion von b also mit der Addition von + a zu b identisch ist; — a zu b addieren heisst gar nichts anderes, als + a von b subtrahieren, und — a von b subtrahieren nichts anderes als + a zu b addieren. Es sind daher auch — a Zunahmen einer Anzahl von Dingen irgend einer Art 𝔓 um je 1 Ding dieser Art nichts anderes als + a Abnahmen, und — a Abnahmen nichts anderes als + a Zunahmen. Z. B. — a Vermehrungen eines Haufens Äpfel um je 1 Apfel sind der Sache dasselbe wie + a

Verminderungen, — a Verkürzungen einer Linie um je 1 Elle dasselbe wie + a Verlängerungen, — a Gewinne von je 1 Mark + a Verluste, und — a Verluste + a Gewinne. Wenn daher der Buchstabe $\mathfrak{N}$ Einheitszunahmen in Bezug auf die Anzahlen irgend einer Art von Dingen $\mathfrak{P}$, und der Buchstabe $\mathfrak{N}_1$ Einheitsabnahmen in Bezug auf dieselbe Art von Dingen, oder umgekehrt $\mathfrak{N}$ Einheitsabnahmen und $\mathfrak{N}_1$ Einheitszunahmen bedeuten, so ist $-a\mathfrak{N} = +a\mathfrak{N}_1$. Die benannte Zahl $-a\mathfrak{N}$ bestimmt dann also, obwohl sie selbst nur eine fingierte Zahl von Dingen ist, eine wirkliche Zahl von Dingen, oder obwohl sie selbst nicht die Grösse einer Anzahl von Dingen ist, eine solche Grösse, nämlich die einer Anzahl von Zunahmen oder von Abnahmen um je Eine Einheit.

Zunahmen und Abnahmen (Vermehrungen und Verminderungen, Gewinne und Verluste, Verlängerungen und Verkürzungen, Erhöhungen und Erniedrigungen u. dergl.), m. E. W. Grössenveränderungen sind demnach die einzige Art von Dingen, nach denen negative Zahlen benannt werden, und deren Mengen durch negative Zahlen bestimmt werden können. Es wäre z. B. sinnlos, von — 100 Einwohnern zu reden, aber wenn die Einwohnerschaft einer Stadt in einem gewissen Zeitraume um 100 Menschen abgenommen hat, so haben — 100 Vermehrungen derselben um je Eine Person stattgefunden, und eine Zunahme um 100 sind — 100 Abnahmen um je Eine Person. Oder die Grösse x der Abscisse eines Punktes P und die Grösse y seiner Ordinate sind unter allen Umständen positive Zahlen, wenngleich die analytische Geometrie der Kürze wegen von positiven und negativen Koordinaten redet; aber wenn man feststellt, dass die eine von den beiden Richtungen jeder Achse, etwa die Richtung von Links nach Rechts der Abscissen- und die Richtung von Unten nach Oben der Ordinaten-Achse, als diejenige ihres Zunehmens und die entgegengesetzte als diejenige ihres Abnehmens zu betrachten seien, und zweitens, dass beide Achsen ursprünglich in dem Punkte O, in welchem sie zusammentreffen, enden, und dass sie, wenn die Lage eines Punktes P in ihrer Ebene bestimmt werden soll, von dem Punkte O aus zunehmen oder abnehmen bis zu den Punkten P_x und P_y, in denen sie von den durch den Punkt P parallel zu ihnen gelegten Geraden geschnitten werden, so sind die Zahlen x und y, welche die Grösse der Abscisse und der Ordinate des Punktes P angeben, gleich den Zahlen der Zunahmen bezw. der

Abnahmen um 1, welche die Achsen erleiden müssen, um statt im Punkte O in den Punkten P_x und P_y zu enden; und wenn nun die X-Achse vom Punkte O aus abnehmen muss, damit P_x ihr Endpunkt werde, so kann ihre Grösseveränderung statt unter den Begriff des Abnehmens unter den des Zunehmens gebracht werden, indem die Zahl ihrer Einheitszunahmen gleich $-x$ gesetzt wird, und in derselben Weise kann jede Zahl $+y$ von Einheitsabnahmen der Y-Achse durch $-y$ ersetzt werden, indem nur die Benennung Einheitsabnahme mit Einheitszunahme vertauscht wird. Es kann hier noch die Folgerung gezogen werden, dass man, wenn man den Sinn einer Gleichung, welche eine Beziehung zwischen Zahlen ausdrückt, denen eine Benennung $\mathfrak{N}$ hinzugefügt werden kann, und die sämtlich oder zum Teil als negativ gedacht werden dürfen, durch eine solche Hinzufügung näher bestimmen will, als Benennung $\mathfrak{N}$ nur entweder Zunahmen oder Abnahmen um je Ein Ding irgend einer Art $\mathfrak{P}$ wählen darf. Sollen z. B. von den in der Gleichung $pa - qb = rc$ vorkommenden Zahlen p und q und r als blosse Koëfficienten, dagegen a und b und c als benennbare Zahlen betrachtet werden, soll also die Gleichung sagen, dass p mal a Dinge von der Art $\mathfrak{N}$ weniger q mal b Dinge von der Art $\mathfrak{N}$ r mal c Dinge von der Art $\mathfrak{N}$ seien, und wird bestimmt, dass a und b positive Zahlen bedeuten, c dagegen eine negative, so folgt bezüglich der Art $\mathfrak{N}$, dass die zu ihr gehörenden Dinge entweder sämtlich Zunahmen oder sämtlich Abnahmen um je Ein Ding irgend einer Art $\mathfrak{P}$, etwa um je Ein Meter oder Ein Kilogramm oder Eine Sekunde seien.

6. Auch eine gebrochene Zahl kann offenbar durch keine Benennung $\mathfrak{N}$ die Bedeutung einer Zahl von Dingen erhalten. Wird z. B. auf die Frage „Wie viel Ellen hat dieses Stück Tuch?" geantwortet „Fünf Viertel", so ist $^5/_4$ weder eine Zahl von Ellen noch von Viertelellen. Denn ist ein Stück $^5/_4$ Ellen gross, so ist die Zahl der Ellen, die es enthält, 1, und die der Viertelellen 5. Aber der Zähler und der Nenner eines Bruches sind ganze Zahlen, also solche, die als Zahlen von Dingen gedacht werden können, und der Bruch selbst giebt sie benennende Dinge an, und zwar, wenn er selbst benannt ist, in vollständiger, sonst in unvollständiger Weise. Der Zähler a eines benannten Bruches $a/b\,\mathfrak{N}$ ist die Zahl von Einzeldingen einer Klasse, deren Begriff es ist, dass b von den ihr angehörenden Einzeldingen, gleichviel welche,

1 Einzelding der den Bruch benennenden Klasse, der Klasse der 𝔑, bilden. Z. B. der Nenner 4 des benannten Bruches $^5/_4$ Ellen nennt, in Verbindung mit der Bruchbenennung Elle, als Dinge, die der Zähler 5 zählt, Viertel-Ellen, also Dinge, von denen jede beliebige Vierzahl eine Einzahl von Ellen bildet. Hiernach zählt ein benannter Bruch a/b 𝔑 zwar nicht eine Anzahl von Dingen, bestimmt aber doch, wie jede benannte ganze Zahl, die Grösse einer solchen, nämlich derjenigen Anzahl, die sein Zähler zählt, der aus a so beschaffenen Dinge, dass allgemein b von ihnen 1 Ding der Klasse 𝔑 ausmachen, bestehenden Anzahl.

Da jedes der einen eigentlichen (d. i. nicht einer ganzen Zahl gleichen) Bruch a/b 𝔑 benennenden Dinge, der Dinge der Klasse 𝔑, aus so viel Dingen als der Nenner angiebt, also aus b Dingen besteht, und die ganze Zahl b, als der Nenner eines eigentlichen Bruches, stets grösser als 1 ist, so können nur solche Dinge zur Benennung eines Bruches dienen, die in Teile zerlegbar sind. Unteilbare Dinge wie die geometrischen Punkte, sind dazu unfähig. Z. B. der Begriff Elle vermag den Bruch $^5/_4$ nur deshalb zu benennen, weil eine Elle in 4 gleiche Teile geteilt werden kann. Da sich ferner die Dinge der Klasse 𝔑, die den Bruch a/b benennen, und die den Zähler a benennenden Dinge, in die sie geteilt werden können, die Dinge der Klasse btel-𝔑, nur dadurch unterscheiden, dass jedes Ding der ersten Klasse eine Anzahl von b Dingen, jedes Ding der zweiten Klasse eine Anzahl von 1 Ding ist, also nur der Grösse nach, wie ein Haufen von 100 Äpfeln und eine aus 25 Stück oder 1 Stück bestehende Anzahl von Äpfeln oder wie Ellen und Viertel-Ellen, so sind auch Dinge, die sich nur in Teile, welche dem Ganzen ungleichartig sind, wie z. B. Menschen, Bäume, Äpfel, Häuser, Uhren, m. E. W. nur der Form nach unteilbare Dinge, unfähig, einen Bruch zu benennen. Ausdrücke wie „Ein halber Apfel“ fügen nicht der Angabe eines Bruches die Angabe seiner Benennung hinzu, sondern geben die letztere, wo sie überhaupt die Bedeutung eines benannten Bruches haben, nur indirekt zu erkennen. Denn das Quantum, dessen Grösse wir durch den Bruch $^1/_2$ angeben, wenn wir von einem halben Apfel reden, ist nicht der Apfel selbst, an den wir dabei denken, sondern das Stück Materie, aus dem er besteht, und dieses Stück Materie ist in Teile zerlegbar, die wieder Stücke Materie sind, sich also, bloss als Teile eines Stückes Materie betrachtet,

von dem Ganzen, dessen Teile sie sind, nur der Grösse nach unterscheiden, m. a. W. demselben gleichartig sind.

Eine aus mehreren Dingen, die, sei es schlechthin, sei es nur der Form nach, unteilbar sind, bestehende Menge 𝔐, ein diskretes Quantum nach der herkömmlichen Bezeichnung, kann nicht alle möglichen Brüche benennen, sondern nur solche, durch deren Nenner die Zahl der unteilbaren Dinge, aus denen 𝔐 besteht, ohne Rest teilbar ist. Z. B. der Begriff eines Paares geometrischer Punkte kann als Benennung nur zu ganzen Zahlen und den Brüchen $^1/_2$, $^3/_2$, $^5/_2$ u. s. w., der eines Dutzends Äpfel nur zu ganzen Zahlen und Brüchen mit den Nennern 2, 3, 4, 6, 12 hinzutreten. Um alle möglichen Brüche benennen zu können, müsste eine diskrete Menge aus unendlich vielen Dingen bestehen, da nur ∞ durch alle ganzen Zahlen ohne Rest teilbar ist. Aber eine aus unendlich vielen unteilbaren Dingen bestehende Menge, z. B. die der Weltkörper oder der in irgend einer Linienstrecke enthaltenen Punkte, kann in eine bestimmte Zahl b nur solcher gleicher Teile geteilt werden, die selbst wieder unendlich sind und daher weder von dem Ganzen noch von denjenigen gleichen Teilen, von welchen nicht b, sondern c oder d zusammen dem Ganzen gleich sind, unterschieden werden können; es hätte daher überhaupt keinen Sinn, den Begriff einer solchen Menge zu einem Bruche a/b als Benennung hinzuzufügen, oder, was dasselbe ist, ihn zu einer Masseinheit zu machen, z. B. von der Hälfte oder zwei Dritteln einer unendlichen Menge von Weltkörpern zu reden.

Alle möglichen Brüche zu benennen sind nur diejenigen Mengen befähigt, die nicht aus, sei es schlechthin, sei es nur der Form nach, unteilbaren Dingen zusammengesetzt sind, an denen also, mit KANT zu reden, kein Teil der kleinstmögliche ist, oder die keine einfachen (unteilbaren) Teile haben, die kontinuirlichen Quanta, wie sie genannt zu werden pflegen. Denn ein kontinuirliches Quantum 𝔐 kann in jede beliebige Zahl b einander gleicher Teile geteilt werden, und es kann dann ein ihm gleichartiges Quantum $𝔐_1$ gedacht werden, welches aus einer beliebigen Zahl a von Teilen des ersten (aus a Dingen der Klasse btel-𝔐) besteht, oder, was dasselbe ist, welches zu messen 𝔐 als Masseinheit dienen kann. Ein kontinuirliches Quantum ist z. B. ein Meter, überhaupt jede beliebige Linienstrecke, denn eine begrenzte Linie ist ins Unendliche in Linien teilbar, die in ihr ent-

haltenen Punkte sind nicht ihre Teile, da man aus Punkten nicht die kleinste Linie zusammensetzen kann, auch nicht aus unendlich vielen. Auch mehrere Linien, die sich nicht aneinander reihen, sondern sich schneiden, sowie solche, die gar keinen Punkt gemeinsam haben, bilden zusammen ein kontinuirliches Quantum. Andere Beispiele kontinuirlicher Quanta sind die Kubikmeter und überhaupt alle Volumina, gleichviel, ob die Körper, deren Volumina sie sind, räumliche Continua sind oder, wie das Planetensystem, Teile haben, die durch Zwischenräume voneinander getrennt sind, die Kilogramme und überhaupt alle Gewichte, die Jahre und überhaupt alle Zeitstrecken und Summen zusammenhängender oder von einander getrennter Zeitstrecken.

Es ist nunmehr leicht zu sehen, dass auch jede irrationale Zahl, wenngleich keine die Zahl einer Anzahl von Dingen sein kann, doch die Grösse eines Quantums zu bestimmen fähig ist. Da sich nämlich zu jeder irrationalen Zahl ein beliebig kleines Intervall zweier rationaler Zahlen angeben lässt, in welchem sie liegt, so bestimmt eine solche Zahl die Grösse eines Quantums offenbar dann und nur dann, wenn alle die rationalen Zahlen es thun, die sich so zu ihr verhalten, dass von je zweien die eine grösser, die andere kleiner als sie ist. Bestimmen z. B. 3 und 4, 3,1 und 3,2, 3,14 und 3,15, 3,141 und 3,142 u. s. w. die Grösse eines Quantums, etwa unter der Benennung Meter die Länge einer Linie, so thut dies auch die Zahl π. Die rationalen Zahlen, welche Paare bilden, in deren Intervall eine irrationale Zahl liegt, bestimmen aber sämtlich die Grösse eines Quantums dann, wenn zwei ein Paar bildende es thun und die Quanta, deren Grösse sie bestimmen, Teile eines kontinuirlichen Quantums sind. Denn bestimmen die Zahlen p und q die Grösse von Quantis P und Q, welche Teile desselben kontinuierlichen Quantums sind, so folgt aus der im Begriffe des kontinuierlichen Quantums liegenden unendlichen Teilbarkeit, dass auch alle zwischen p und q liegenden rationalen Zahlen zwischen P und Q liegende Quanta bestimmen. Die Grösse eines diskreten Quantums dagegen kann niemals durch eine irrationale Zahl bestimmt werden. Denn welche Masseinheit man auch wählen mag, ob einen letzten nicht mehr teilbaren Teil oder eine durch eine bestimmte Anzahl dieser Teile gebildete Menge, wie das Paar oder das Dutzend oder das Schock, m. a. W., von welcher Benennung $\mathfrak{N}$ auch die gesuchte Masszahl

x sein soll, so kann das Intervall zweier Zahlen p und q, welche die Grösse von Teilen eines diskreten Quantums bestimmen, nicht kleiner sein, als eine gewisse Zahl es angiebt. Es sei z. B. irgend eine Menge geometrischer Punkte gegeben, so ist, wenn als Masseinheit die kleinstmögliche, nämlich 1 geometrischer Punkt gewählt wird, die kleinste Differenz zweier Teile, die in jener Menge vorkommen kann, 1, und wenn als Masseinheit das Dutzend Punkte gewählt wird, so ist die kleinste Differenz $^1/_{12}$.

Wenn denn nun, wird man fragen, eine benannte irrationale Zahl a $\mathfrak{N}$ die Grösse einer Anzahl von Dingen nicht der Art $\mathfrak{N}$, sondern einer andern Art $\mathfrak{N}_1$ bestimmt, so dass $a\mathfrak{N} = x\mathfrak{N}_1$ (wo x eine ganze Zahl bedeutet), welcher Art sind dann die Dinge $\mathfrak{N}_1$, und wie gross ist x? Die $\mathfrak{N}_1$, antworte ich, sind in dem Falle, dass die irrationale Zahl a einfach, d. h. nicht die Verbindung einer irrationalen Zahl α mit einem rationalen Koëfficienten p ist, Dinge von der Grösse a $\mathfrak{N}$, d. i. von einer Grösse, der man beliebig nahe kommen kann, wenn man zwei Quanta, von denen das eine grösser, das andere kleiner als a $\mathfrak{N}$ ist, konstruiert, und nach dem aus der Zahl a zu entnehmenden Gesetze das erste dieser beiden Quanta immer kleiner, das andere immer grösser werden lässt, und dann ist $x = 1$; und in dem Falle, dass $a = p\alpha$ ist, sind die $\mathfrak{N}_1$ Dinge von der Grösse $\alpha\mathfrak{N}$ und $x = p$. Z. B. π Meter sind 1 Strecke von der Grösse π Meter, 3 π Meter 3 solcher Strecken. Da die irrationale Zahl a einem unendlichen Decimalbruche gleich ist, so könnte man auch versuchen, die in Rede stehende Frage in analoger Weise wie die analoge auf die benannte gebrochene Zahl a/b $\mathfrak{N}$ bezügliche zu beantworten. Die Antwort würde alsdann lauten, die $\mathfrak{N}_1$ seien Dinge, von denen 10^∞ zusammen 1 $\mathfrak{N}$ ausmachen, also unendlich kleine Dinge, und x sei der Zähler des unendlichen Dezimalbruchs a, also unendlich gross. Es liegt aber auf der Hand, dass nicht das es ist, was man damit sagen will, wenn man die Grösse eines Quantums durch eine irrationale Zahl bestimmt, — dass man z. B., wenn man als die Länge des halben Umfangs eines Kreises vom Radius 1 Meter π Meter angiebt, damit nicht sagen will, jener halbe Kreisumfang sei 31415... solcher Linienstrecken, von denen 10^∞ 1 Meter ausmachen. Linienstrecken, von denen 10^∞ 1 Meter ausmachten, die also unendlich klein wären, giebt es ja gar nicht, und gäbe es ihrer, so würde die Angabe, dass die Summen 31415...,

also von unendlich vielen derselben gleich dem halben Kreisumfange sei, Niemandem zu einer Vorstellung von der Grösse des halben Kreisumfanges verhelfen können.

So hat sich denn die Vermutung, dass die nicht zugleich positiven und ganzen Zahlen die Grösse von Quantis, die nicht Anzahlen oder Mengen von Dingen seien, zu bestimmen vermöchten, insoweit, als sie sich auf die reellen Zahlen bezog, nicht bestätigt. Zwar die Annahme, dass auch eine negative, eine gebrochene und auch eine irrationale Zahl, wenn auch nicht als eine Zahl von Dingen auftreten, so doch zu Grössebestimmungen dienen könne, hat sich als richtig erwiesen, aber zugleich hat sich gezeigt, dass doch auch das Quantum, dessen Grösse durch eine benannte Zahl $\mathfrak{N}$, die nicht zugleich positiv und ganz ist, bestimmt wird, stets eine Anzahl von Dingen ist, nämlich von Dingen $\mathfrak{N}_1$, die von den die Zahl a benennenden Dingen verschieden ist. Es bleibt nun noch zu untersuchen, wie es sich in dieser Hinsicht mit den imaginären Zahlen verhält.

7. Eine benannte imaginäre Zahl $\sqrt{-a}\,\mathfrak{N}$ kann offenbar niemals, welche Art von Dingen auch der Buchstabe $\mathfrak{N}$ bezeichnen möge, die Grösse einer Anzahl der benennenden Dinge $\mathfrak{N}$ oder die einer Anzahl den Dingen $\mathfrak{N}$ gleichartiger (sich nur der Grösse nach von ihnen unterscheidender) Dinge $\mathfrak{N}_1$ bestimmen. Bedeutet x eine ganze positive oder überhaupt eine reelle Zahl, so würde nicht nur die Gleichung $\sqrt{-a}\,\mathfrak{N} = x\,\mathfrak{N}$, sondern auch die andere $\sqrt{-a}\,\mathfrak{N} = x\,\mathfrak{N}_1$ Unmögliches behaupten, wenn die $\mathfrak{N}_1$ den $\mathfrak{N}$ gleichartigen Dinge, z. B. die $\mathfrak{N}$ Meter und die $\mathfrak{N}_1$ Ellen, sein sollten. Denn da $x\,\mathfrak{N}_1$ stets einer reellen Zahl mit der Benennung $\mathfrak{N}$, etwa $y\,\mathfrak{N}$, gleich ist, so würde auch nach der zweiten Gleichung die imaginäre Zahl $\sqrt{-a}$ einer reellen (nämlich y) gleich sein, und das ist ein Widerspruch. Aber nicht ohne weiteres darf die Gleichung $\sqrt{-a}\,\mathfrak{N} = x\,\mathfrak{N}_1$ auch für den Fall, dass die $\mathfrak{N}$ und die $\mathfrak{N}_1$ ungleichartige Dinge sind, für sich widersprechend erklärt werden. Es darf m. a. W. nicht von vornherein die Möglichkeit eines Qualitätsunterschiedes zweier Arten von Dingen $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{N}_1$, der durch die Gleichung $\sqrt{-a}\,\mathfrak{N} = x\,\mathfrak{N}_1$ bestimmt würde, in Abrede gestellt werden. Wie die Gleichung $-a\,\mathfrak{N} = x\,\mathfrak{N}_1$ zwar dann, wenn die $\mathfrak{N}$ und die $\mathfrak{N}_1$ gleichartige Dinge bedeuten sollen, etwas Unmögliches behauptet, aber etwas Mögliches dann, wenn die $\mathfrak{N}$ und die

$\mathfrak{N}_1$ ungleichartig sein dürfen (nämlich die $\mathfrak{N}$ Zunahmen und die $\mathfrak{N}_1$ Abnahmen, oder umgekehrt die $\mathfrak{N}$ Abnahmen und die $\mathfrak{N}_1$ Zunahmen, da ja — a Zunahmen um ein gewisses Quantum gleich x Abnahmen um ein anderes Quantum, z. B. — 2 Zunahmen um je 1 Decimeter = 1 Abnahme um 20 Centimeter), so vielleicht auch die Gleichung $\sqrt{-a}\,\mathfrak{N} = x\,\mathfrak{N}_1$. Es kann sogleich noch hinzugefügt werden, dass die auf ihre Möglichkeit zu prüfende Gleichung $\sqrt{-a}\,\mathfrak{N} = x\,\mathfrak{N}_1$ durch die bestimmtere $\sqrt{-a}\,\mathfrak{N} = 1\,\mathfrak{N}_1$ ersetzt werden darf. Angenommen nämlich, es bestehe die Gleichung $\sqrt{-a}\,\mathfrak{N} = -b\,\mathfrak{M}$, in welcher die Dinge $\mathfrak{M}$ Zunahmen oder Abnahmen bedeuten müssten, da ja eine negative Zahl nur durch Zunahmen oder Abnahmen benannt werden kann, so könnte man $-b\,\mathfrak{M}$ durch $+b\,\mathfrak{M}_1$ ersetzen, indem man unter dem $\mathfrak{M}_1$ die dem $\mathfrak{M}$ entsprechenden Abnahmen oder Zunahmen verstände. Es gälte dann also auch die Gleichung $\sqrt{-a}\,\mathfrak{N} = +b\,\mathfrak{M}_1$. Diese aber geht in $\sqrt{-a}\,\mathfrak{N} = 1\,\mathfrak{N}_1$ über, wenn unter dem $\mathfrak{N}_1$ die Dinge verstanden werden, die aus b Dingen von der Art $\mathfrak{M}_1$ zusammengesetzt sind.

Es wird zweckmässig sein, vor der Gleichung $\sqrt{-a}\,\mathfrak{N} = 1\,\mathfrak{N}_1$ die einfachere $\sqrt{a}\,\mathfrak{N} = 1\,\mathfrak{N}_1$ auf ihre Möglichkeit zu prüfen, also zu untersuchen, in welchem Verhältnisse zwei Klassen von Dingen $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{N}_1$ zu einander stehen müssen, damit die benannten Zahlen $\sqrt{a}\,\mathfrak{N}$ und $1\,\mathfrak{N}_1$ einander gleich seien, und ob dieses Verhältnis möglich ist. Setzen wir zunächst den bestimmten Fall, die Dinge $\mathfrak{N}$ seien Meter und die Dinge $\mathfrak{N}_1$ Längen von noch unbekannter Grösse, die zu lösende Aufgabe sei demnach die, diese Längen zu finden, also, wenn dieselben etwa als Strecken bezeichnet werden, zu bestimmen, in welchem Verhältnisse eine Strecke zu einem Meter stehen müsse, damit die Gleichung $\sqrt{a}$ Meter = 1 Strecke richtig sei, so kann die Lösung sofort in mannigfaltigen Gestalten gegeben werden, z. B. in folgenden dreien: 1. Ist die gesuchte, als Strecke bezeichnete Länge möglich, so kann sie zur Seite eines Quadrates gemacht werden, dessen Grösse zufolge der Gleichung $\sqrt{a}$ Meter = 1 Strecke a Quadratmeter beträgt. Eine Strecke ist dann also gleich der Seite eines a Quadratmeter grossen Quadrates. Ist umgekehrt ein a Quadratmeter grosses Quadrat möglich, so auch die als Strecke bezeichnete Länge $\sqrt{a}$ Meter. Ein solches Quadrat aber ist möglich, denn lässt man

eine gerade Linie von 0 bis $a+1$ Meter wachsen, so wächst das Quadrat, dessen Seite sie ist, kontinuirlich von 0 bis $(a+1)^2$ Quadratmeter, zu den Werten, die seine Grösse durchläuft, gehört also auch der zwischen 0 und $(a+1)^2$ Quadratmetern liegende von a Quadratmeter. 2. Die der Gleichung y Meter $= x^2$ Meter entsprechende Kurve (bekanntlich eine Parabel, deren Scheiteltangente mit der X-Achse, und deren Achse mit der Ordinaten-Achse zusammenfällt, und deren Parameter die Grösse von 1 Meter hat) besitzt, wie aus der Kontinuität der Funktion x^2 folgt, eine Ordinate von der Grösse a Meter. Die Abscisse zu dieser Ordinate ist $\sqrt{a}$ Meter und mithin gleich der gesuchten als Strecke bezeichneten Länge. 3. Eine Schnur sei so beschaffen, dass von ihrem Anfangspunkte aus gemessen x Meter von ihr x^2 Gramm wiegen, also $\sqrt{a}$ Meter a Gramm, so ist, nach der Gleichung $\sqrt{a}$ Meter $=$ 1 Strecke, 1 Strecke die Länge desjenigen Stückes, dessen Gewicht a Gramm beträgt.

Die allgemeine Aufgabe, die Möglichkeit der Gleichung $\sqrt{a}\,\mathfrak{N} = 1\,\mathfrak{N}_1$ zu beweisen, findet ihre Lösung in folgender Überlegung. Man kann sich unter allen Umständen, welcher Art die Dinge $\mathfrak{N}$ auch sein mögen, denken, dass zu x Dingen dieser Art x^2 Dinge einer beliebigen Art, etwa wiederum der Art $\mathfrak{N}$, auf irgend eine Weise zugeordnet seien. Nach dieser Regel (die, wenn die Zahl der zu $x\,\mathfrak{N}$ zugeordneten Dinge mit $y\,\mathfrak{N}$ bezeichnet wird, ihren Ausdruck in der Gleichung $y\,\mathfrak{N} = x^2\,\mathfrak{N}$ findet) ist das Quantum $a\,\mathfrak{N}$ zugeordnet zu dem Quantum $\sqrt{a}\,\mathfrak{N}$, vorausgesetzt, dass es überhaupt ein den Dingen $\mathfrak{N}$ gleichartiges Quantum giebt, zu welchem $a\,\mathfrak{N}$ zugeordnet ist. Unter dieser Voraussetzung ist also $1\,\mathfrak{N}_1$ dasjenige den Dingen $\mathfrak{N}$ gleichartige Quantum, zu welchem nach dem Gesetze $y\,\mathfrak{N} = x^2\,\mathfrak{N}$ das Quantum $a\,\mathfrak{N}$ zugeordnet ist, und diese Bestimmung reicht zur Definition der Art des Dinges $\mathfrak{N}_1$ hin. Die die Möglichkeit der Gleichung $\sqrt{a}\,\mathfrak{N} = 1\,\mathfrak{N}_1$ bedingende Voraussetzung ist aber unter allen Umständen richtig, weil die Funktion x^2 kontinuierlich ist. Lässt man nämlich x von einem Werte 0 bis zu einem Werte k zunehmen, der grösser als a und, wenn a kleiner als 1 ist, auch grösser als 1 ist, so nimmt das zu $x\,\mathfrak{N}$ zugeordnete Quantum $x^2\,\mathfrak{N}$ von 0 bis $k^2\,\mathfrak{N}$ zu, geht also durch den zwischen $0\,\mathfrak{N}$ und $k^2\,\mathfrak{N}$ liegenden Wert $a\,\mathfrak{N}$ hindurch, und folglich gehört zu den Werten, die $x\,\mathfrak{N}$ durchläuft, wenn x von 0 bis k wächst, auch der Wert,

zu welchem $a\,\mathfrak{R}$ zugeordnet ist, d. i. der Wert $\sqrt{a}\,\mathfrak{R}$. — Will man, statt die Art der Dinge $\mathfrak{R}_1$ durch die Art der Dinge $\mathfrak{R}$, umgekehrt diese durch jene bestimmen, so findet man, nachdem man $\sqrt{a}\,\mathfrak{R} = 1\,\mathfrak{R}_1$ in $1\,\mathfrak{R} = \frac{1}{\sqrt{a}}\,\mathfrak{R}_1$ umgeformt hat, dass $\mathfrak{R}$ dasjenige den Dingen $\mathfrak{R}_1$ gleichartige Quantum ist, zu welchem nach der Regel $y\,\mathfrak{R}_1 = x^2\,\mathfrak{R}_1$ das Quantum $1/a\,\mathfrak{R}_1$ zugeordnet ist. Wird z. B. unter einer Strecke nicht, wie oben angenommen wurde, eine durch die Gleichung $\sqrt{a}$ Meter $=$ 1 Strecke, sondern eine durch die Gleichung $\sqrt{a}$ Strecken $=$ 1 Meter definierte Länge verstanden, so ist die Strecke gleich der Abscisse, zu welcher bezüglich der Kurve y Meter $= x^2$ Meter die $\sqrt{1/a}$ lange Ordinate gehört.

Prüfen wir nunmehr in derselben Weise, wie eben die Gleichung $\sqrt{a}\,\mathfrak{R} = 1\,\mathfrak{R}_1$, die Gleichung $\sqrt{-a}\,\mathfrak{R} = 1\,\mathfrak{R}_1$, so wäre nach der Regel $y\,\mathfrak{R} = x^2\,\mathfrak{R}$ zu dem Quantum $\sqrt{-a}\,\mathfrak{R}$ zugeordnet das Quantum $-a\,\mathfrak{R}$, wenn es überhaupt ein den Dingen $\mathfrak{R}$ gleichartiges Quantum gäbe, zu welchem $-a\,\mathfrak{R}$ nach jener Regel zugeordnet wäre, unter dieser Voraussetzung wäre mithin $1\,\mathfrak{R}_1$ dasjenige den Dingen $\mathfrak{R}$ gleichartige Quantum, zu welchem $-a\,\mathfrak{R}$ quadratisch zugeordnet wäre. Wären z. B. die $\mathfrak{R}$ Meter, so wäre unter der Voraussetzung, dass die Parabel y Meter $= x^2$ Meter einen Punkt hätte, dessen Ordinate $-a$ Meter gross wäre, $1\,\mathfrak{R}_1$ die Länge der Abscisse dieses Punktes. Während aber die Bedingung, auf welche die Untersuchung der Möglichkeit der Gleichung $\sqrt{a}\,\mathfrak{R} = 1\,\mathfrak{R}_1$ führte, unter allen Umständen erfüllt ist, enthält diejenige, die erfüllt sein müsste, damit die Gleichung $\sqrt{-a}\,\mathfrak{R} = 1\,\mathfrak{R}_1$ möglich wäre, einen Widerspruch. Es ist (wegen der Kontinuität der Funktion x^2) notwendig, dass zu den Werten, welche die Regel $y\,\mathfrak{R} = x^2\,\mathfrak{R}$ der Zahl y zu geben gestattet, der Wert a gehört, aber unmöglich, dass dazu der Wert $-a$ gehöre. Denn das Quantum, zu welchem $-a\,\mathfrak{R}$ quadratisch zugeordnet wäre, wäre $\sqrt{-a}\,\mathfrak{R}$, und dieses Quantum müsste einem den Dingen $\mathfrak{R}$ gleichartigen Dinge $\mathfrak{R}_1$ gleich sein; wären z. B. die $\mathfrak{R}$ Meter, so müssten $\sqrt{-a}$ Meter einem den Metern gleichartigen Dinge, also einer gewissen Länge, gleich sein. Es ist aber unmöglich, dass $\sqrt{-a}\,\mathfrak{R}$ einem den Dingen $\mathfrak{R}$ gleichartigen Dinge $\mathfrak{R}_1$ gleich sei. Angenommen auch, die Gleichung $\sqrt{-a}\,\mathfrak{R} = 1\,\mathfrak{R}_1$ sei möglich, die benannte Zahl $\sqrt{-a}\,\mathfrak{R}$

bestimmte also die Grösse einer Anzahl von Dingen $\mathfrak{N}_1$, so könnten doch, wie gleich im Anfange dieses Paragraphen festgestellt wurde, diese Dinge $\mathfrak{N}_1$ nicht den Dingen $\mathfrak{N}$ gleichartig sein, da dann die imaginäre Zahl $\sqrt{-a}$ einer reellen Zahl gleich sein müsste.

Ungleich den gebrochenen, den irrationalen und den negativen Zahlen können demnach die imaginären unter keinen Umständen die Grösse einer Anzahl von Dingen bestimmen. Wenn sich nun nachweisen liesse, dass doch auch sie überhaupt zu Grössebestimmungen dienen könnten, so würde folgen, dass es noch andere Arten von Quantis gebe als Anzahlen oder Mengen. Den Versuch eines solchen Nachweises wird aber Jeder für verfehlt halten, der es sich klar gemacht hat, dass die nicht zugleich positiven und ganzen reellen Zahlen zur Bestimmung keiner anderen Quanta $\mathfrak{N}_1$ als solcher, die Anzahlen von Dingen sind, gebraucht werden können. Nur so lange kann man es für möglich halten, dass eine Grössebestimmung durch eine Zahl sich auf etwas anderes als eine Anzahl beziehen könne, als man sich durch den Schein, dass diejenigen, die wir durch benannte gebrochene oder irrationale oder negative Zahlen ausdrücken, etwas anderes als Anzahlen zum Gegenstande haben, täuschen lässt. Der Anerkennung des Rechtes der reinen Arithmetik, den Begriff der imaginären Zahl in ihre Untersuchungen einzuführen, steht diese Überzeugung in keiner Weise entgegen. Die Evidenz und der Wert der Ergebnisse, zu denen die Arithmetik durch ihre letzte Erweiterung des Zahlbegriffs insbesondere in der Theorie der Gleichungen und der Lehre von der Darstellung der Funktionen durch Reihen gelangt, ist gänzlich unabhängig von der Ansicht, die man über die Anwendbarkeit der imaginären Zahlen zu Grössebestimmungen haben mag.

(Schluss folgt.)

ZEITSCHRIFT
FÜR
PHILOSOPHIE UND PHILOSOPHISCHE KRITIK
VERLAG VON HERMANN HAACKE IN LEIPZIG.

Band 120. Heft 2.

Über den Begriff der Quantität.

Von **Jul. Bergmann.**

(Schluss.)

8. Das allgemeinste Ergebnis der vorstehenden Erörterungen, dass alle Quanta, deren Grösse sich durch eine Zahl bestimmen lasse, Anzahlen von Dingen seien, scheint auf den ersten Blick der Lehre KANTS vom Begriffe der Grösse zu widersprechen. Denn hält man sich an den Wortlaut derselben, so zieht sie aus dem Begriffe des kontinuierlichen Quantums als desjenigen, an welchem kein Teil der kleinstmögliche sei, die Folgerung, dass kein solches Quantum aus zählbaren Dingen zusammengesetzt sei, und schliesst weiterhin die so zusammengesetzten Dinge überhaupt vom Begriffe des Quantums aus. „Wenn die Synthesis des Mannigfaltigen der Erscheinung, heisst es in der Kritik der reinen Vernunft, unterbrochen ist, so ist dieses ein Aggregat von vielen Erscheinungen, und nicht eigentlich Erscheinung als ein Quantum, welches nicht durch die blosse Fortsetzung der produktiven Synthesis einer gewissen Art, sondern durch Wiederholung einer immer aufhörenden Synthesis erzeugt wird. Wenn ich 13 Thaler ein Geldquantum nenne, so benenne ich es so fern richtig, als ich darunter den Gehalt einer Mark fein Silber verstehe; welche aber allerdings eine kontinuierliche Grösse ist, in welcher kein Teil der kleinste ist, sondern jeder Teil ein Geldstück ausmachen könnte, welches immer Materie zu noch kleineren enthielte. Wenn ich aber unter jener Benennung 13 runde Thaler verstehe, als so viel Münzen (ihr Silbergehalt mag sein, welcher er wolle), so benenne ich es unschicklich durch ein Quantum von Thalern, sondern muss es ein Aggregat, d. i. eine Zahl Geldstücke nennen." Aber KANT würde doch gewiss nicht geleugnet haben, dass auch die kontinuierlichen Quanta An-

zahlen von Dingen sind, wenn das Wort Ding in dem weiten Sinne genommen wird, in welchem es zur Bezeichnung auch von Metern, Viertel-Metern, Kilogrammen, Sekunden u. s. w. gebraucht wird. Die angeführte Stelle wird daher dahin gedeutet werden dürfen, dass sie den kontinuierlichen Quantis nicht die Anzahlen von Dingen überhaupt, sondern nur diejenigen, die aus, sei es schlechthin, sei es nur der Form nach, unteilbaren Dingen bestehen, entgegensetzen und den Gebrauch des Wortes Quantum auf die Bezeichnung der Dinge von kontinuierlicher Grösse einzuschränken empfehlen will.

Wirklich unvereinbar mit der Lehre KANTS vom Begriffe der Grösse ist jedoch die Ansicht, dass der Begriff der Anzahl von wesentlicher Bedeutung für die Bestimmung desjenigen des Quantums sei. Seine terminologische Bemerkung, dass man etwas nicht schon darum ein Quantum nennen dürfe, weil es eine Anzahl sei, hat ihren Grund darin, dass er die auch den kontinuierlichen Quantis zukommende Eigenschaft, eine Anzahl von Dingen zu sein, nicht für eine solche gelten lassen wollte, von der die Philosophie ausgehen müsste oder auch nur dürfte, um, wie es die gegenwärtige Untersuchung gethan hat, durch Hinzufügen der Kontinuität als determinierenden Merkmals den Begriff des kontinuierlichen Quantums zu bilden. Er sah in dem Anzahlsein nicht eine essentielle, sondern nur eine accidentelle Bestimmtheit der kontinuierlichen Quanta und hielt es deshalb für unrichtig, die letzteren zu den Anzahlen überhaupt in das Verhältnis der Art zur Gattung, und zu den nicht kontinuierlichen Anzahlen in dasjenige der Art zur nebengeordneten Art zu setzen.

Der dem Artbegriffe des kontinuierlichen Quantums oder, da es keine anderen Quanta als kontinuierliche geben soll, des Quantums überhaupt übergeordnete Gattungsbegriff ist nach KANT derjenige des Erzeugnisses einer von der produktiven Einbildungskraft, d. i. dem Verstande, inwiefern er das Vermögen ist, die unserem Anschauen entgegentretenden Erscheinungen als Objekte aufzufassen, ausgeübten Synthesis. Was wir als ein Quantum auffassen, lehrt die Kritik der reinen Vernunft, ist ein Mannigfaltiges (Vielfaches), welches uns entweder schon durch die blosse Empfindung oder dadurch, dass das Empfundene sich unserem Anschauen als ein Räumliches oder als ein Zeitliches darstellt, gegeben ist, und dessen Bestandteile gleichartig sind; und als ein

Quantum fassen wir ein solches Mannigfaltiges auf durch seine Synthesis, seine Zusammensetzung zu etwas, was Eines ist; und zwar ist dies eine Synthesis, die nicht erst auf die Wahrnehmung, welche das gleichartige Mannigfaltige als ein Objekt erfasst, folgt, sondern schon in dieser Wahrnehmung und überhaupt in der Vorstellung eines gleichartigen Mannigfaltigen als eines Objektes als ihre Grundlage und Bedingung ihrer Möglichkeit vorhanden ist, da erst das Bewusstsein der synthetischen Einheit eines Mannigfaltigen dasselbe zu einem Objekte für uns macht. Das den Quantis, gegenüber anderen Arten von Erzeugnissen einer produktiven Synthesis, z. B. den Zusammenhängen von Ursachen und Wirkungen, Eigentümliche, ihre specifische Differenz in Beziehung auf den Gattungsbegriff des Erzeugnisses einer produktiven Synthesis, besteht darin, dass das Mannigfaltige, welches durch die Synthesis zu einer Einheit gemacht wird, gleichartig ist, und dass seine Gleichartigkeit die Eigenschaft ist, die durch seine Synthesis zum Bewusstsein gebracht wird. Eine Synthesis ist allerdings auch das Zusammenfassen von mehreren Dingen, z. B. dreizehn Thalerstücken zu einer Anzahl oder einem Aggregate. Aber diese Synthesis ist nicht ein Werk der produktiven Einbildungskraft, sondern des betrachtenden Verstandes. Denn das, was durch sie zusammengefasst wird, ist nicht ein der synthetischen Einheit und damit der Form des Objektes noch gänzlich entbehrendes Mannigfaltiges, sondern eine Reihe bereits geformter Objekte. Sie ist nicht schon in der Wahrnehmung eines zu einem Objekte zusammengefassten Mannigfaltigen als ihre Grundlage und Bedingung ihrer Möglichkeit enthalten, sondern folgt erst auf dieselbe. Dass alle Quanta kontinuierlich sind, d. i., dass kein Teil an ihnen der kleinste ist, folgt ohne weiteres aus ihrem Begriffe. Denn die produktive Einbildungskraft beginnt in der Erzeugung der Wahrnehmung eines Quantums nicht, wie es der Verstand beim Zählen eines Aggregats thut, mit einem Teile, der selbst schon ein Quantum wäre, sondern mit der Grenze zwischen dem Quantum, dessen Wahrnehmung sie erzeugt, und der Negation des Realen, woraus das Quantum besteht, oder mit demjenigen zu diesem Quantum Gehörenden, was selbst noch keine Grösse hat, oder was an ihm gleich Null ist; und sie springt nicht von der Null zu einem wenn auch noch so kleinen Teile über, noch von einem Teile, dessen Wahrnehmung sie erzeugt hat, zu einem

grösseren, da ja das von ihr Übersprungene ein ohne ihre Hülfe wahrgenommenes Quantum sein würde. Ihre Synthesis setzt sich fort, ohne jemals inmitten ihres Werkes aufzuhören und wieder anzufangen, während die im Zusammenfassen und Zählen eines Aggregates bereits wahrgenommener Dinge bestehende eine unterbrochene oder die Wiederholung einer immer aufhörenden Synthesis ist.

Die produktive Synthesis, lehrt KANT weiter, durch die wir zur Wahrnehmung eines (kontinuierlichen) Quantums gelangen, ist entweder eine successive, von der Null aus alle Teile nach und nach erzeugende, oder eine augenblickliche, nicht von den Teilen zum Ganzen gehende. Im ersten Falle heisst das Wahrgenommene ein extensives, im zweiten ein intensives Quantum. Extensiv sind diejenigen Quanta, zu denen uns das Mannigfaltige durch die Anschauung der Erscheinungen als im Raume und in der Zeit seiender, intensiv diejenigen, zu denen uns das Mannigfaltige schon durch die blosse Empfindung gegeben ist. „Eine extensive Grösse nenne ich diejenige, in welcher die Vorstellung der Teile die Vorstellung des Ganzen erst möglich macht (und also notwendig vor dieser vorhergeht). Ich kann mir keine Linie, so klein sie auch sei, vorstellen, ohne sie in Gedanken zu ziehen, d. i. von einem Punkte aus alle Teile nach und nach zu erzeugen, und dadurch allererst diese Anschauung zu verzeichnen. Ebenso ist es mit jeder auch der kleinsten Zeit bewandt. Ich denke mir darin nur den successiven Fortgang von einem Augenblicke zum anderen, wo durch alle Zeitteile und deren Hinzuthun endlich eine bestimmte Zeitgrösse erzeugt wird. Da die blosse Anschauung an allen Erscheinungen entweder der Raum oder die Zeit, so ist jede Erscheinung als Anschauung eine extensive Grösse, indem sie nur durch successive Synthesis (von Teil zu Teil) in der Apprehension erkannt werden kann." „Die Apprehension, bloss vermittelst der Empfindung, erfüllt nur einen Augenblick, (wenn ich nämlich nicht die Succession vieler Empfindungen in Betracht ziehe). Als etwas in der Erscheinung, dessen Apprehension keine successive Synthesis ist, die von Teilen zur ganzen Vorstellung fortgeht, hat sie also keine extensive Grösse." Da aber doch jede Empfindung der Verringerung fähig sei und abnehmen könne, bis sie verschwinde, so habe doch auch das Reale in der Erscheinung als dasjenige, was ein Gegenstand der Empfindung sei,

eine Grösse. „Das Reale in der Erscheinung hat jederzeit eine Grösse, welche aber nicht in der Apprehension angetroffen wird, indem diese vermittelst der blossen Empfindung in einem Augenblicke und nicht durch successive Synthesis vieler Empfindungen geschieht, und also nicht von den Teilen zum Ganzen geht; es hat also zwar eine Grösse, aber keine extensive. Nun nenne ich diejenige Grösse, die nur als Einheit apprehendiert wird, und in welcher die Vielheit nur durch Annäherung zur Negation = 0 vorgestellt werden kann, die intensive Grösse. Also hat jede Realität in der Erscheinung intensive Grösse, d. i. einen Grad."

Angenommen, diese psychologische Theorie sei richtig, so würde doch nicht aus ihr folgen, dass es nicht eine essentielle, sondern eine accidentelle Eigenschaft der kontinuierlichen Quanta sei, eine Anzahl von Dingen, z. B. von Centimetern oder Sekunden, zu sein, und dass es daher unrichtig sei, sie und die diskreten Anzahlen von Dingen als Arten der Gattung Anzahl von Dingen überhaupt nebeneinander zu stellen und beide als Quanta zu bezeichnen. Denn nicht darauf kommt es für die Bestimmung des Verhältnisses zweier Begriffe an, wie sie uns entstanden sind, sondern lediglich darauf, was wir in ihnen denken. Was wir im Begriffe des kontinuierlichen Quantums denken, ist aber auch nach dem, was KANT darüber sagt, die ins Unendliche sich wiederholende Zusammensetzung aus gleichartigen und gleichen Teilen, und in dieser Eigenschaft ist die des Zusammengesetztseins aus gleichen und gleichartigen Teilen überhaupt, die auch den diskreten Anzahlen zukommt, enthalten. Sollten uns die Begriffe des kontinuierlichen Quantums und der diskreten Menge auch in wesentlich verschiedenen Weisen entstanden sein, so stellen sie sich doch der Betrachtung ihrer Inhalte als Begriffe einander coordinierter Arten der Gattung der Anzahlen überhaupt dar. Überhaupt kommt die Art, in der uns ein Begriff entstanden ist, für seine Bestimmung nur dann in Betracht, wenn aus ihrer Eigentümlichkeit die Eigentümlichkeit dessen, was den Inhalt oder Gegenstand des Begriffes bildet, verstanden werden kann. Die Eigentümlichkeit der Weise aber, wie uns der Begriff des kontinuierlichen Quantums entstanden ist, würde uns, wenn sie die von KANT angegebene sein sollte, so wenig dazu dienen können, uns diesen Begriff klar zu machen, dass wir vielmehr umgekehrt uns erst diesen Begriff klar gemacht haben müssten,

und zwar mittels des allgemeineren Begriffs des überhaupt aus gleichen und gleichartigen Teilen Bestehenden oder der Anzahl, um sie verstehen zu können.

Ich kann aber auch die Lehre von der produktiven Synthesis als dem Ursprunge des Begriffes des kontinuierlichen Quantums nicht für richtig halten. Sie scheint mir mit einem Widerspruche behaftet zu sein. Die produktive successive Synthesis soll Zusammensetzung eines gleichartigen Mannigfaltigen sein, also, da das Mannigfaltige, aus dem ein Quantum zusammengesetzt ist, seine Teile sind, Zusammensetzung eines Ganzen aus seinen Teilen; sie soll, wie auch KANT ausdrücklich erklärt, gehen von Teil zu Teil, bis sie das Ganze erzeugt hat. Eben dieses soll aber auch nicht ihre Weise sein. Denn jeder Teil eines kontinuierlichen Quantums ist, wie klein er auch sei, selbst schon ein kontinuierliches Quantum, also ein Werk der produktiven Synthesis, also nicht das, wovon dieselbe ausgeht; die von Teil zu Teil gehende, das Ganze aus seinen Teilen zusammensetzende Synthesis ist nicht die produktive, sondern die auf die Wahrnehmung mehrerer Quanta folgende, deren Erzeugnis nicht ein kontinuierliches Quantum, sondern ein als ein Ganzes aufgefasstes Aggregat sein soll. Betrachten wir die beiden im Begriffe der produktiven Synthesis liegenden Bestimmungen in umgekehrter Reihenfolge, so soll das Material, woraus die produktive successive Synthesis ein kontinuierliches Quantum erzeugt, ein Mannigfaltiges von Elementen, deren Grösse gleich Null ist, sein, eine Mannigfaltigkeit von Raumpunkten bei der Erzeugung räumlicher Gebilde, von Zeitpunkten bei der Erzeugung von Zeitstrecken. Aber die mannigfaltigen Elemente, die das Material der produktiven Synthesis bilden, sollen auch nicht von dieser Art sein. Denn aus Elementen, deren Grösse gleich Null ist, lässt sich überhaupt nichts zusammensetzen, aus Raumpunkten keine Linie, aus Zeitpunkten keine Zeitstrecke; das Ziehen einer Linie ist nicht eine Synthesis von Raumpunkten, wodurch die Vorstellung einer Linie als eines Continuums erzeugt würde, sondern ein Denken einer Bewegung, das die Vorstellung des Raumes, in welchem die Bewegung stattfinden soll, als eines kontinuierlichen zur Voraussetzung hat. Der im Begriffe der successiven Synthesis als der Bedingung der Möglichkeit, räumliche und zeitliche Quanta wahrzunehmen, liegende Widerspruch geht über auf denjenigen der

Anschauung, die der Synthesis das Material liefern soll. Denn würden der Raum und die Zeit erst durch die Synthesis Continua für uns, so wären die Anschauungen dieser Formen Anschauungen nur von Punkten, von denen man nicht einmal sagen dürfte, dass sie Aggregate bildeten, da die Bestandteile eines Aggregates irgendwie zusammen sein müssen, um Bestandteile eines Aggregates zu sein, das blosse durch keine Synthesis ergänzte Anschauen aber nach KANTischer Auffassung kein Zusammensein zum Inhalte haben kann; so aber hätten wir keine Anschauung vom Raume und von der Zeit, denn der Raum und die Zeit sind nicht Aggregate von Punkten, und hätten auch keine Anschauung von Punkten, denn Punkte sind für sich gar nichts. In derselben Weise wie der Begriff der successiven widerspricht sich auch der der augenblicklichen Synthesis. Auch diese müsste eine Zusammensetzung von Teilen sein, nämlich von Teilen des empfundenen intensiven Quantums, da in einem Quantum nichts anderes zu finden ist, was zusammengesetzt werden könnte, als seine Teile, und auch sie soll doch eine solche Zusammensetzung nicht sein, da alle Teile eines Quantums, wie klein sie auch sind, selbst Erzeugnisse der Synthesis sein sollen. Den weiteren Widerspruch im Begriffe der augenblicklichen Synthesis, dass die ihren Erzeugnissen zukommende Grösse gar nicht in der Apprehension angetroffen werde, oder dass sie gar keine den Teilen, aus denen doch nach dem allgemeinen Begriffe des Quantums auch das intensive bestehen muss, entsprechenden Abschnitte habe, — diesen weiteren Widerspruch lasse ich hier beiseite, da er aus einem anderen entspringt, der schon in der Annahme intensiver Quanta als solcher, die nur als Einheit apprehendiert und als eine Vielheit nur durch Annäherung zur Negation = 0 vorgestellt werden können, enthalten ist, und diese Annahme einer besonderen Untersuchung bedarf.

III.

9. Die gegenwärtige Untersuchung begann damit, festzustellen, dass zu den Dingen, denen die Eigenschaft, eine Grösse zu haben, zukommt, jedenfalls alle diejenigen gehören, welche Anzahlen oder Mengen von Dingen sind, und dass die Grösse einer Anzahl die Bestimmtheit, die sie als Anzahl hat, also die Zahl der sie bildenden Dinge oder die nach Dingen von der Art derer, aus denen sie besteht, benannte Zahl ist. Eine benannte

Zahl, bemerkten wir weiter, durch die eine Anzahl der sie benennenden Dinge bestimmt werde, sei notwendig zugleich positiv und ganz, unter den Begriff des Quantums falle aber auch alles, was durch eine nicht zugleich positive und ganze Zahl bestimmt werden könne, der Begriff des durch eine benannte Zahl bestimmbaren Quantums scheine also umfassender, als der der Anzahl zu sein. Es hat sich jedoch gezeigt, dass jede nach einer gewissen Art von Dingen $\mathfrak{N}$ benannte nicht zugleich positive und ganze Zahl einer nach einer anderen Arten von Dingen $\mathfrak{N}_1$ benannten zugleich positiven und ganzen Zahl gleich ist (z. B. — a Zunehmen um je 1 Gramm einer gewissen Substanz gleich + a Abnehmen um je 1 Gramm derselben Substanz, oder a/b Centimeter gleich a Längeneinheiten, von denen b zusammen 1 Centimeter ausmachen), und dass also alle Quanta, die überhaupt durch eine benannte Zahl, also, da nur die imaginären Zahlen keine Benennung annehmen können, durch eine reelle Zahl bestimmt werden können, Anzahlen sind. Es darf nunmehr weiter geschlossen werden, dass der Begriff des Quantums überhaupt sich mit dem der Anzahl deckt, oder dass es überhaupt keine andere Weise der Eigenschaft, eine Grösse zu haben, giebt als die den Anzahlen eigene. Denn angenommen auch, dass im guten Sprachgebrauche das Wort Grösse noch in einer oder mehreren anderen Bedeutungen als in derjenigen der Bestimmbarkeit durch eine benannte Zahl vorkomme, so gehört doch diese Bestimmbarkeit zu den Merkmalen, die den Inhalt des wissenschaftlichen Begriffes der Grösse bilden, und nur um diesen Begriff, nicht um das Wort Grösse, handelt es sich hier.

Die logische Bearbeitung des Begriffes der Grösse hat hiermit ihr Ziel erreicht. Es darf jedoch noch die Erörterung einer Schwierigkeit von ihr erwartet werden, die zwar nicht dem von ihr definierten Begriffe des Quantums selbst, aber zahlreichen und sehr verschiedenartigen Anwendungen, deren er fähig zu sein beansprucht, anhaftet. Dieselbe besteht darin, dass es Vieles giebt, was einerseits zu verlangen scheint, dass wir es als ein Quantum auffassen, andererseits aber diese Auffassung dadurch unmöglich macht, dass es uns weder Teile in ihm zu unterscheiden noch es mit Gleichartigem zu einem Quantum zusammenzufassen gestattet.

Zu dem so Beschaffenen gehören die empfindbaren Qualitäten (die Farben, Töne, Gerüche u. s. w.), sofern wir ihnen eine

Stärke zuschreiben, — die intensiven Quanta KANTS. Niemals kann unser Wahrnehmen in einer solchen Qualität mehrere Qualitäten unterscheiden, aus deren Stärkegraden sich der ihrige zusammensetzte. Wir können z. B. einen starken Geruch oder Geschmack nicht in mehrere schwächere, einen lauten Ton nicht in mehrere leisere von derselben Höhe und Klangfarbe, die Farbe, in der sich uns ein Körper im Tageslichte darstellt, nicht in mehrere von der Art derjenigen, die wir in der Dämmerung an ihm sehen, zerlegen, wie eine Linie von grösserer Länge in mehrere von kleinerer. Wir können, mit KANT zu reden, ein Empfindbares hinsichtlich seiner Stärke niemals als Vielheit, sondern immer nur als Einheit apprehendieren. Und ebensowenig sind wir im stande, aus zwei gleichartigen Empfindungsinhalten einen dritten von grösserer Intensität zusammenzusetzen. Und doch hat die Auffassung eines Empfundenen als eines Quantums, dessen Quantität in seiner Intensität bestehe, wie die einer Linie oder einer Zeitstrecke in ihrer Länge, keinen andern Sinn als den, dass die kleinere Intensität in der grösseren und das kleinere intensive Quantum in dem grösseren als Teil enthalten sei, wie die kleinere Länge in der grösseren und die Linie von kleinerer Länge in der von grösserer, dass z. B. ein Ton, der doppelt so laut sei als ein anderer von gleicher Höhe und Klangfarbe, aus zwei dem letzteren quantitativ gleichen zusammengesetzt sei.

Der naive Realismus könnte diesem Widerspruche durch die Unterscheidung dessen, was eine Qualität, die wir empfinden, wirklich, an sich, sei, und dessen, was sie unserem unvollkommenen Empfinden zu sein scheine, zu entgehen suchen. An sich sei die empfundene Qualität aus weniger intensiven Qualitäten derselben Art in analoger Weise zusammengesetzt, wie eine Linie aus weniger langen, diese Zusammensetzung entziehe sich aber unserem Empfinden; unser Empfinden und unser sich früherer Empfindungen erinnerndes Vorstellen vermöge nur in einer bald mehr bald weniger bestimmten Weise den Grössenunterschied zwischen zwei von einander gesonderten Qualitäten zu erfassen, und auch das nur dann, wenn derselbe nicht hinter einem gewissen Betrage zurückbleibe. An einer ähnlichen Unvollkommenheit leide ja auch unser Wahrnehmen räumlicher Quanta; denn wenn es uns auch möglich sei, in allem, was uns als ein Ausgedehntes erscheine, Teile zu unterscheiden, so habe doch die Schärfe unserer Sinne

und mit ihr unsere Fähigkeit, die Teile wiederum in Teile zu zerlegen, eine Grenze, obwohl an sich jedes Ausgedehnte ins Unendliche teilbar sei; und wie der Intensitätsunterschied zweier gleichartiger Qualitäten, so höre auch der Ausdehnungsunterschied zweier neben einander existierender Linien oder Flächen oder Körper auf, für uns wahrnehmbar zu sein, wenn er einen gewissen Wert nicht erreiche. In ähnlicher Weise könnte auch der naturwissenschaftliche Realismus, der gegen den naiven die empfundenen Qualitäten für blosse Empfindungsinhalte, die keine den Körpern an sich zukommenden Eigenschaften oder Zustände abbilden, mit demselben aber die raumerfüllenden Körper für an sich existierende Dinge hält, die dem Begriffe des intensiven Quantums anhaftende Schwierigkeit zu beseitigen versuchen. Er müsste nur an die Stelle der an sich seienden Körpern an sich zukommenden empfindbaren Qualitäten dem wahrnehmenden Subjekte an sich zukommende Empfindungen setzen und behaupten, dass jede Empfindung gleichartige Empfindungen und jeder Empfindungsinhalt gleichartige Empfindungsinhalte von geringerer Intensität zu Teilen habe, dass wir uns aber keiner Empfindung deutlich genug bewusst seien, um in ihr oder in ihrem Inhalt in ähnlicher Weise wie in einer Linie Teile unterscheiden zu können. Denselben Weg könnte endlich auch der Idealismus einschlagen, der nicht bloss die empfundenen Qualitäten der Körper, sondern auch die Körper selbst samt dem sie in sich fassenden Raume für blosse Phänomene, blosse Objekte unseres Vorstellens erklärt. Denn auch er könnte zwischen den Empfindungen als den primitivsten Erzeugnissen der Vorstellungsthätigkeit und dem Bewusstsein von ihnen unterscheiden und die Teilbarkeit hinsichtlich der Intensität für eine sich dem Bewusstsein entziehende Eigenschaft der Empfindungen und ihrer Inhalte erklären. Es scheint mir indessen, dass weder die Unterscheidung objektiver Qualitäten und subjektiver Empfindungsinhalte noch die der Empfindungen selbst und dessen, was uns von ihnen und ihren Inhalten zum Bewusstsein gelangt, leistet, was sie leisten soll. Denn das Intensive, das uns mit dem Widerspruche behaftet zu sein scheint, dass es ein Quantum sei und doch weder in mehrere kleinere intensive Quanta zerlegt werden, noch mit anderen zusammen ein grösseres bilden könne, besteht weder in einer an sich existierenden Qualität, die sich unserem Empfinden nur undeutlich zu erkennen

gäbe, noch in dem Inhalte einer Empfindung, die dem Bewusstsein von ihm vorherginge und nur unvollständig in dasselbe einträte, sondern in demjenigen, dessen wir uns als unseres Empfindungsinhaltes bewusst sind, dem uns vollständig bekannten Ideellen des Empfundenen, mag demselben nun ein ihm mehr oder weniger ähnliches physisches oder psychisches Reelles zu Grunde liegen oder nicht. Nicht an unabhängig von unserem Empfinden existierenden physischen Qualitäten und nicht an den Inhalten eines Empfindens, welches unabhängig von unserem Bewusstsein in unserer Seele vor sich ginge, sondern an demjenigen, was uns nicht bloss Empfindungs- sondern auch Bewusstseinsinhalt ist, als solchem meinen wir eine wenn auch mehr oder weniger unbestimmte Quantität oder Grösse, die wir als Intensität oder Stärke bezeichnen, zu bemerken, und dieses Bemerken ist nur dann möglich, wenn wir in denselben Bewusstseinsinhalten, nicht in den Inhalten dem Bewusstsein vorhergehender Empfindungen, Teile von geringerer Intensität bemerken, sowie wir an einer Linie eine Länge nur dann bemerken können, wenn wir in ihr Teile von geringerer Länge bemerken. Angenommen, unsere Empfindungen und ihre Inhalte seien an sich hinsichtlich ihrer Intensität teilbar, diese Teilbarkeit bliebe aber unserem Bewusstsein verborgen, so müsste es auch unserem Bewusstsein verborgen bleiben, dass sie der Verminderung fähige Quanta wären, und erscheint umgekehrt eine Empfindung unserem Bewusstsein als ein der Verminderung fähiges Quantum, so muss sie ihm auch als teilbar erscheinen, denn man kann in keiner anderen Weise sehen, dass etwas der Verminderung fähig ist, als indem man sieht, dass es teilbar ist. Ist es keine Selbsttäuschung, wenn wir an unseren Empfindungen eine besondere Weise der Quantität, die Intensität, zu bemerken glauben, so muss zwar zugegeben werden, dass dieses Bemerken ebenso wie dasjenige der den ausgedehnten Dingen eigenen besonderen Weise, ein Quantum zu sein, nämlich der Länge, der Breite und der Tiefe, unvollkommen sei, da wir hinter einem gewissen Betrage zurückbleibende Intensitätsunterschiede nicht mehr wahrzunehmen im stande sind, aber diese Unvollkommenheit kann nicht so weit gehen, dass wir in dem bemerkten intensiven Quantum keine Teile bemerkten, denn mit der Eigenschaft eines Wahrgenom-

menen, Teile zu haben, entzöge sich auch die, ein Quantum zu sein, unserem Bewusstsein.

Die empfindbaren Qualitäten drängen uns noch in anderer Weise den sich widersprechenden Begriff eines Quantums auf, welches grösser sei als ein anderes und doch keine Teile habe. Ich weise nur kurz hin auf die Höhe der Töne und gewisse Farbennüancierungen. Wenn wir einem Tone eine Höhe, die grösser oder kleiner als diejenige eines andern sei, also ausser der Intensität noch eine andere besondere Beziehung zu dem Gegensatze des Mehr oder Weniger zuschreiben, so bringen wir ihn nicht minder, als wenn wir ihm eine Intensität zuschreiben, unter den Begriff des Quantums und näher unter den des kontinuierlichen Quantums, und das Gleiche thun wir bezüglich einer grauen Farbe, wenn wir urteilen, sie sei heller oder dunkler als eine andere graue, oder, besser (da die Helligkeit einer zwischen Schwarz und Weiss stehenden Farbe mit ihrer Intensität zusammenzufallen scheint), bezüglich einer zwischen Rot und Blau stehenden Farbe, wenn wir sie rötlicher oder bläulicher sowie einer vom Weiss verschiedenen Farbe, wenn wir sie mehr oder weniger gesättigt als eine andere finden, obwohl uns ein Ton nicht als ein Vielfaches von Tönen geringerer Höhe, z. B. der Ton, der eine Oktave höher ist als der Ton c, nicht als aus dem Tone c und einem anderen, dessen Höhe gleich einer Oktave wäre, Zusammengesetztes erscheint, eine aus Rot und Blau gemischte Farbe nicht als eine Anhäufung von Farben, deren jede weniger rötlich als das reine Rot, oder von solchen, deren jede weniger bläulich als das reine Blau wäre, und der Unterschied zweier Farben von verschiedener Sättigung nicht wiederum als eine unvollkommene gesättigte Farbe.

Das Gebiet der empfindbaren Qualitäten ist nicht das einzige, in welchem der Begriff eines Quantums, das grösser sei als andere Quanta derselben Art und doch keine Teile habe, Anwendung zu finden scheint. Als ein einem andern Gebiete angehörendes Beispiel nenne ich die Bewegungen. Die Bewegung eines Massenpunktes ist ein Quantum in Hinsicht auf die Zeit, in Hinsicht auf den Raum und in Hinsicht auf die Masse des Punktes. In jeder dieser drei Hinsichten hat sie Teile; denn wenn wir die Zeit, die hindurch sie dauert, oder den Weg, den der sich bewegende Punkt am Ende dieser Zeit zurückgelegt hat, oder die Masse des

sich bewegenden Punktes teilen, so teilen wir damit die Bewegung selbst; eine Bewegung, die zwei Minuten dauert, ist ja zusammengesetzt aus zwei aufeinanderfolgenden, die je Eine Minute dauern, eine Bewegung, durch die ein Punkt eine Strecke von zwei Metern zurücklegt, aus zwei aufeinander folgenden, deren jeder ein Weg von je Einem Meter entspricht, eine Bewegung eines Punktes, dessen Masse zwei Gramm beträgt, aus zwei gleichzeitigen, deren jede das Prädikat einer Masse von Einem Gramm ist. Zu den genannten drei Weisen der Quantität einer Bewegung scheint nun aber noch eine vierte zu kommen: die Geschwindigkeit, und mit dieser verhält es sich anders als mit jenen. Die Bewegung eines Punktes ist hinsichtlich ihrer Geschwindigkeit nicht, wie hinsichtlich der Länge ihrer Zeit, der Länge ihres Weges und der Grösse der Masse des sich bewegenden Punktes, aus Bewegungen zusammengesetzt. Wählt man als Einheit der Geschwindigkeit etwa diejenige eines Punktes, der gleichförmig in 1 Sekunde 1 Meter zurücklegt, so beträgt die Geschwindigkeit eines Punktes, der in 1 Sekunde 2 Meter zurücklegt, 2 Geschwindigkeitseinheiten, aber die Bewegung mit der Geschwindigkeit 2 ist ebensowenig aus zwei Bewegungen, deren jede die Geschwindigkeit 1 hätte, zusammengesetzt, wie ein Ton von der Stärke 2 aus zwei Tönen von der Stärke 1, oder wie ein Ton von der Höhe 2 aus zwei Tönen von der Höhe 1, oder wie eine vollkommen gesättigte Farbe aus zwei halbgesättigten. Was die Mechanik Zerlegung einer Bewegung $\mathfrak{B}$ hinsichtlich ihrer Geschwindigkeit v nennt, ist auch in dem Falle, dass zu Komponenten Bewegungen von derselben Richtung wie $\mathfrak{B}$ gewählt werden, dass also, wenn die Geschwindigkeiten der Komponenten mit $v_1, v_2 \ldots$ bezeichnet weden, $v = v_1 + v_2 + \ldots$ ist, eine Unterscheidung nicht von Teilen, aus denen die Bewegung zusammengesetzt wäre, sondern von Ursachen, durch deren Zusammenwirken die Bewegung $\mathfrak{B}$ würde hervorgebracht werden. Sind wirklich die Geschwindigkeiten Quantitäten einer besonderen Art in Beziehung auf die Bewegungen als Quanta, wie es die Längen in Beziehung auf die Linien sind und wie es die Intensitäten in Beziehung auf die Empfindungsinhalte zu sein scheinen, so gilt von ihnen, was KANT von den intensiven Quantis sagt: sie können nur als Einheiten apprehendiert werden.

Schliesslich mag noch als eine Art derjenigen Bestimmt-

heiten, welche Quantitäten unteilbarer Quanta zu sein scheinen, die mathematische Wahrscheinlichkeit angeführt werden. Wahrscheinlichkeit ist ein Begriff, den wir auf Annahmen in der Weise beziehen, dass wir der einen eine grössere Wahrscheinlichkeit zuschreiben als der andern, also in analoger Weise, wie wir den Begriff der Länge auf Linien, den der Intensität auf Empfindungsinhalte, den der Tonhöhe auf Töne, den der Rötlichkeit auf eine zwischen Rot und Blau stehende Farbe beziehen. Wir denken sie demnach als eine Art der Quantität und die Annahmen, denen wir eine grössere oder geringere Wahrscheinlichkeit zuschreiben, als Quanta. Doch müssen wir wieder einräumen, dass kein Quantum dieser Art aus Teilen von geringerer Quantität bestehe; vielmehr sind alle Annahmen hinsichtlich ihrer Wahrscheinlichkeit, wie alle Empfindungsinhalte hinsichtlich ihrer Intensität, alle Töne hinsichtlich ihrer Höhe, alle aus Rot und Blau gemischten Farben hinsichtlich ihrer Rötlichkeit oder ihrer Bläulichkeit, alle Bewegungen hinsichtlich ihrer Geschwindigkeit unteilbar. Wählt man als Einheit der Wahrscheinlichkeit die Gewissheit, und setzt man die Wahrscheinlichkeit einer Annahme, deren kontradiktorisches Gegenteil gewiss ist, gleich Null, so ist z. B. die Wahrscheinlichkeit der Annahme, dass ich wenigstens in einem der drei Würfe, die ich mit Einem Würfel zu machen beabsichtige, eine Sechs werfe, $1/2$, diejenige der im übrigen gleichen sich auf zwei Würfe beziehenden $1/3$, und diejenige der sich auf einen einzigen Wurf beziehenden $1/6$, die erste also dreimal, die zweite zweimal so gross als die dritte, aber die erste Annahme kann nicht in drei, die zweite nicht in zwei zerlegt werden, deren jede die Wahrscheinlichkeit der dritten hätte.

10. Sicherlich kann die Zahl, welche die Quantität eines Quantums bestimmt, nur dann grösser als die, welche die Quantität eines andern gleichartigen Quantums bestimmt, kann also die Quantität eines Quantums nur dann teilbar sein, wenn dieses Quantum selbst teilbar ist. Ist das Empfundene ein Quantum, dessen Quantität in seiner Intensität besteht, so muss seine Intensität in mehrere Intensitätseinheiten oder Teile von Intensitätseinheiten geteilt werden können, und jeder dieser Teilungen muss eine Teilung seiner selbst in der Weise korrespondieren, dass jeder Teil der ganzen Intensität die Intensität eines Teils des Empfundenen ist, sowie jeder Teil der Länge einer Stange die

Länge eines Teils dieser Stange ist. Ist ein Ton ein Quantum, dessen Quantität seine Höhe ist, so ist es aus zwei, drei, vier usw. Tönen zusammengesetzt, deren Höhe die Hälfte, ein Drittel, ein Viertel usw. der seinigen ist. Wenn wirklich die Geschwindigkeit eine Quantität und das Quantum, dessen Quantität sie ist, eine Bewegung ist, so sind in jeder Bewegung andere von geringerer Geschwindigkeit als Teile enthalten. Nun ist aber kein Empfindungsinhalt aus Empfindungsinhalten von schwächerer Intensität, kein Ton aus Tönen von niedrigerer Höhe, keine rötliche Farbe aus Farben von geringerer Rötlichkeit, keine Bewegung aus Bewegungen von kleinerer Geschwindigkeit, keine Annahme aus Annahmen von kleinerer Wahrscheinlichkeit zusammengesetzt. Es kann also nicht richtig sein, dass ein Empfindungsinhalt ein Quantum hinsichtlich der Intensität sei, ein Ton ein solches hinsichtlich der Höhe usw. Auf der andern Seite unterliegt es indessen keinem Zweifel, dass wir, wenn wir die Töne, die Farben, die Bewegungen, die Annahmen als Quanta, und die Intensität, die Tonhöhe, die Nüancierung einer Farbenmischung, die Geschwindigkeit, die Wahrscheinlichkeit als Arten der Quantität vorstellen, etwas im Auge haben, was wirklich ein Quantum ist und eine Quantität, die entweder kontinuierlich oder, wenn sie diskret ist, grösser als Eins ist, also eine teilbare Quantität hat und mithin selbst teilbar ist. Der Fehler jener sich uns aufdrängenden Begriffe, in denen der sich widersprechende eines der Verminderung fähigen und doch unteilbaren Quantums enthalten ist, muss also darin seinen Ursprung haben, dass wir wirkliche Quantitäten als Quantitäten anderer Dinge vorstellen als derjenigen, deren Quantitäten sie in Wirklichkeit sind, m. a. W. darin, dass wir die Eigentümlichkeit einer wirklich gegebenen Art der Quantität verkennen, indem wir das Quantum, dessen Quantität sie ist, mit etwas anderem verwechseln.

Von diesem Gedanken geleitet finde ich, wenn ich von den eben erörterten Begriffen die des mehr oder weniger intensiven Empfundenen und der mehr oder weniger geschwinden Bewegung einstweilen beiseite lasse, dass die übrigen sich in der That auf wirkliche Quanta beziehen, nämlich auf Unterschiede zwischen Qualitäten, also auf Quanta, deren Quantität wir als die Weite eines Unterschiedes bezeichnen können. Das Quantum, welches wir im Auge haben, wenn wir einem Tone eine gewisse positive

Höhe zuschreiben, ist nicht dieser Ton selbst und ebensowenig seine Höhe, sondern der Unterschied, der zwischen ihm und einem ihm im übrigen gleichen, weniger hohen, etwa dem tiefsten der unserem Ohre wahrnehmbaren, hinsichtlich der Höhe besteht, und die Quantität dieses Quantums ist die Weite dieses Unterschiedes, die, wenn wir den Unterschied zwischen dem tiefsten und dem höchsten der uns vernehmlichen Töne gleich 1 setzen, immer ein echter Bruch oder Null oder 1 ist. Wenn wir einem Tone statt einer gewissen Höhe eine gewisse Tiefe zuschreiben, so ist wieder die wirkliche Quantität, die wir bestimmen, nicht etwas, was an diesem Tone für sich allein bemerkt werden könnte, sondern, wenn nur positive Tiefengrade zugelassen werden sollen, die Weite seines Unterschiedes von dem höchsten der uns vernehmlichen Töne. Das wirkliche Quantum, auf das sich der Begriff des Rötlichkeitsgrades oder des Bläulichkeitsgrades einer zwischen Rot und Blau stehenden Farbe bezieht, ist die Verschiedenheit dieser Farbe und einer dem reinen Rot oder dem reinen Blau ähnlicheren oder des reinen Rot oder des reinen Blau selbst, — dasjenige, auf welches sich der Begriff des Sättigungsgrades einer Farbe in der Weise bezieht, dass alle Sättigungsgrade positiv sind, die Verschiedenheit dieser Farbe und des reinen Weiss, — das dem Begriffe des Wahrscheinlichkeitsgrades einer Annahme entsprechende der Unterschied dieser Annahme von einer anderen, deren kontradiktorisches Gegenteil gewiss ist. Die Weite jedes dieser Unterschiede ist teilbar wie die Länge einer Linie, und mit ihr er selbst, wie mit der Länge einer Linie die Linie selbst. Es verhält sich in dieser Hinsicht mit dem Unterschiede zwischen zwei Qualitäten nicht anders wie mit dem zwischen zwei Quantitäten, z. B. zwischen der Länge einer Stange von 3 und derjenigen einer Stange von 2 Metern oder auch der einem Punkte zukommenden Länge Null.

In derselben Weise glaube ich weiter auch die Frage nach der Beziehung der Begriffe der Bewegung und der Geschwindigkeit zu denen des Quantums und der Quantität beantworten zu müssen. Wenn wir einer Bewegung eine Geschwindigkeit von gewisser Grösse zuschreiben, so beurteilen wir ohne Zweifel ein wirkliches Quantum, aber nicht ist die Bewegung selbst dieses Quantum und die Geschwindigkeit die Quantität desselben; denn stände eine Bewegung zu ihrer Geschwindigkeit in dem Verhält-

nisse eines Quantums zu seiner Quantität, so müsste sie aus Bewegungen, deren Geschwindigkeiten zusammen die ihrige ausmachten, zusammengesetzt sein und selbst ein Teil einer Bewegung sein können, in deren Geschwindigkeit die ihrige als Teil enthalten wäre. Das wirkliche Quantum, dessen Quantität wir bestimmen, wenn wir einer Bewegung eine Geschwindigkeit von gewisser Grösse v zuschreiben, ist der Unterschied dieser Bewegung von dem Zustande der Ruhe hinsichtlich der Geschwindigkeit, und die Quantität v dieses Quantums ist die Weite dieses nicht selbst quantitativen, sondern qualitativen Unterschiedes. Dass eine Bewegung eine grössere oder kleinere Geschwindigkeit habe, als eine andere, heisst nichts anderes, als dass ihr Unterschied von dem Zustande der Ruhe grösser oder kleiner sei, als der der anderen, gleichwie das Urteil, dass ein gewisser Ton mehr oder weniger hoch sei, als ein anderer, nichts anderes behauptet, als dass dieser Ton sich von einem anderen, etwa dem tiefsten, für den unser Ohr empfänglich ist, mehr oder weniger unterscheide, als ein gewisser anderer. Der Unterschied v einer Bewegung von dem Zustande der Ruhe ist allerdings insofern von anderer Art, als die vorher betrachteten, als er der Unterschied ist einer Bewegung — nicht von einer Bewegung, sondern von etwas, dessen Sein in einem Körper mit dem Nichtsein von Bewegung überhaupt in demselben Körper identisch ist, während das, womit verglichen ein Ton eine Höhe h oder eine Tiefe t besitzt, nicht etwas, dessen Sein mit dem Nichtsein aller Töne identisch wäre, sondern selbst wieder ein Ton, etwa der tiefste oder der höchste der uns vernehmlichen ist, desgleichen dem reinen Rot und dem reinen Blau ebensowenig wie dem aus Rot und Blau gemischten Farben etwas dazu fehlt, wirkliche Farben zu sein, desgleichen eine Gewissheit besitzende Annahme sowie eine solche, deren kontradiktorisches Gegenteil gewiss ist, nicht minder als diejenigen, deren Wahrscheinlichkeit kleiner als 1 und grösser als 0 ist, dem Begriffe der Annahme völlig entsprechen. Es wäre aber unrichtig, hieraus zu schliessen, dass die Verschiedenheit einer Bewegung als des Subjektes, von dem eine gewisse Geschwindigkeit prädiziert werden könne, und der Ruhe als desjenigen, was man erhalte, wenn man die Geschwindigkeit einer Bewegung Null werden lasse und damit die Bewegung selbst ganz aufhebe, eine Verschiedenheit nicht zweier Qualitäten, sondern

eines Quantums von gewisser Grösse und des gleichartigen Quantums von der Grösse Null sei, und dass also die Geschwindigkeit einer Bewegung zu dieser Bewegung in demselben Verhältnisse stehe, wie die Länge einer Linie zu dieser Linie, in dem Verhältnisse der Quantität eines Quantums zu diesem Quantum. Denn wenn auch das Sein der Ruhe in einem Körper mit dem Nichtsein jeder beliebigen Bewegung in demselben Körper identisch ist, so besteht die Ruhe doch nicht in der blossen Abwesenheit der Bewegung, sondern ist, wie jede Bewegung von bestimmter Geschwindigkeit, ein positives Prädikat des Körpers, dem sie zukommt, sowie das Schwarzsein eines undurchsichtigen Körpers zwar identisch ist mit seinem Nicht-Besitzen einer der Farben, die wir sehen, wenn unser Auge durch Lichtstrahlen gereizt wird, aber doch nicht in der blossen Abwesenheit aller Lichtfarben besteht, sondern ebenso wie Weiss, Rot, Grün u. s. w. eine positive Eigenschaft ist. Ein Körper, dessen Geschwindigkeit (wenn ich mich der gewöhnlichen Auffassung entsprechend ausdrücke) allmählich immer kleiner und zuletzt gleich Null wird, verliert dabei ebensowenig etwas von seinem Besitze an positiven Prädikaten, von seiner Realität oder Vollkommenheit, wie wenn seine Farbe aus Rot durch alle zwischen Rot und Blau liegenden Nuancen in Blau übergeht; wie ein Körper bei solchem Farbenwechsel in jeder Zeitstrecke ebensoviel an Bläulichkeit gewinnt als er an Rötlichkeit verliert, so wird auch einem Körper, dessen Geschwindigkeit abnimmt, bis er ruht, jeder Verlust an Geschwindigkeit oder Unähnlichkeit mit der Ruhe durch einen gleichen Gewinn an Langsamkeit oder Ähnlichkeit mit der Ruhe ersetzt. Der Unterschied zwischen der die Geschwindigkeit v besitzenden Bewegung eines Massenpunktes und dem Ruhezustande ist also nicht minder als derjenige eines Tones von der Höhe h und des tiefsten aller möglichen Töne oder derjenige einer zwischen Rot und Blau stehenden Farbe und des reinen Rot oder des reinen Blau ein Unterschied zweier Qualitäten, und die Behauptung, dass die Grösse v, die wir der Geschwindigkeit einer Bewegung zuschreiben, in Wahrheit die bestimmte Weite des qualitativen Unterschiedes dieser Bewegung vom Zustande der Ruhe sei, enthält daher ebensowenig einen Widerspruch, wie die analogen auf die Höhe oder die Tiefe der Töne, auf die Rötlichkeit oder die Bläulichkeit der zwischen Rot und Blau liegenden

Farben und auf die Wahrscheinlichkeit möglicher aber ungewisser Annahmen bezüglichen.

Wie eine Bewegung und ihre Geschwindigkeit, so stehen auch eine Geschwindigkeit und ihre Beschleunigung nur scheinbar in dem Verhältnisse eines Quantums und seiner Quantität zueinander. Ist das wirkliche Quantum, worauf sich der Begriff der Geschwindigkeit bezieht, der Qualitätsunterschied einer Bewegung von der Ruhe hinsichtlich der Geschwindigkeit, so dasjenige, worauf sich der Begriff der Beschleunigung bezieht, der Qualitätsunterschied einer gleichförmigen (konstanten) Geschwindigkeit und einer ungleichförmigen (veränderlichen) hinsichtlich der Beschleunigung, und in den Weiten dieser Unterschiede bestehen die Quantitäten, deren Werte wir bestimmen, wenn wir die Geschwindigkeit und die Beschleunigung einer Bewegung in Zahlen v und j angeben. Die eben beschriebene Eigentümlichkeit der Geschwindigkeit gegenüber den vorher genannten scheinbaren Quantitätsarten (der Höhe oder der Tiefe eines Tones, der Rötlichkeit oder der Bläulichkeit einer der von Rot und Blau begrenzten Reihe angehörigen Farbe, der Wahrscheinlichkeit oder der Unwahrscheinlichkeit einer Annahme) finden wir jedoch in der Beschleunigung nicht wieder. Denn wenn wir die Beschleunigung einer Geschwindigkeit gleich Null werden lassen, so tritt nicht an die Stelle dieser Geschwindigkeit etwas, dessen Sein in einem Körper mit dem Nichtsein aller Geschwindigkeit in demselben Körper identisch wäre, was sich also so zur Geschwindigkeit verhielte, wie die Ruhe zur Bewegung, sondern es tritt nur an die Stelle der Ungleichförmigkeit der Geschwindigkeit die Gleichförmigkeit, so wie, wenn die Höhe eines Tons bis zu Null herabsinkt, an die Stelle des Tones nicht die Stille, sondern wieder ein Ton, nämlich derjenige, dessen Höhe wir gleich Null zu setzen beschlossen haben, etwa der tiefste aller möglichen Töne tritt, oder, wenn wir von einem Punkte der Farbenreihe Rot—Blau in der Richtung auf Blau fortschreiten, schliesslich nicht zur Farblosigkeit sondern zu Blau gelangen. Der Unterschied, m. a. W., dessen Weite wir bestimmen, wenn wir einer Geschwindigkeit eine gewisse Beschleunigung zuschreiben, ist der Unterschied dieser Geschwindigkeit nicht von einem Zustande, der der Geschwindigkeit so entgegengesetzt wäre, wie die Ruhe der Bewegung, sondern wieder von einer Geschwindigkeit, nämlich der die Be-

schleunigung Null besitzenden, der gleichförmigen, gleichwie derjenige, dessen Weite wir bestimmen, wenn wir einer Annahme eine gewisse Wahrscheinlichkeit zuschreiben, zwischen einer Annahme und einer anderen wirklichen Annahme, nämlich einer solchen, deren Wahrscheinlichkeit gleich Null, oder deren kontradiktorisches Gegenteil gewiss ist, besteht. Wenn man jedoch die Beschleunigung definiert als die Geschwindigkeit des (positiven oder negativen) Zunehmens einer Bewegungsgeschwindigkeit und sie dieser Definition gemäss als ein Prädikat nicht einer Bewegungsgeschwindigkeit selbst, sondern des Zunehmens einer solchen betrachtet, so ist das wirkliche Quantum, dessen Quantität wir bestimmen, wenn wir eine Beschleunigung einer Zahl j gleichsetzen, der Unterschied des Zunehmens, dessen Geschwindigkeit j ist, und des Gegenteils des (positiven oder negativen) Zunehmens überhaupt, also des Unverändertbleibens, und dieser Unterschied ist von derselben Art, wie derjenige einer Bewegung von der Ruhe.

Eine analoge Reihe wie die Begriffe der Bewegung, der Geschwindigkeit und der Beschleunigung bilden diejenigen der Linie, der Richtung und der Krümmung, und es wird daher zur Erläuterung des über die Unterschiedsquanta Vorgetragenen dienen, wenn ich auch noch sie zu den Begriffen des Quantums und der Quantität in Beziehung setze.

Wenn wir auch keiner Linie ein Mehr oder Weniger an Richtung zuschreiben, wie einer Bewegung ein Mehr oder Weniger an Geschwindigkeit, so stehen doch die Linien zu ihren Richtungen in einem Verhältnisse, welches demjenigen der Bewegungen zu ihren Geschwindigkeiten insofern analog ist, als der Unterschied zweier Linien hinsichtlich der Richtung nicht Quantitäten, sondern Qualitäten betrifft und ein Quantum ist, dessen Quantität, die Weite des Unterschiedes, durch eine Zahl bestimmt werden kann. Der Richtungsunterschied einer Linie S und einer andern in derselben Ebene liegenden X, mit der man alle dieser Ebene angehörenden Linien, deren Richtung bestimmt werden soll, zu vergleichen beschlossen hat, oder der Winkel, den S mit X macht, gehört indessen nicht zu derselben Art der Unterschiedsquanta wie derjenige einer die Geschwindigkeit v habenden Bewegung und des Ruhezustandes, sondern zu der andern, für die oben die Unterschiede eines Tones von dem tiefsten Tone, einer Farbe der

Reihe Rot-Blau und des einen oder des anderen Endgliedes dieser Reihe, einer wahrscheinlichen Annahme und einer solchen, deren Gegenteil gewiss ist, als Beispiele angeführt wurden. Denn das, womit wir eine Linie S vergleichen, wenn wir ihre Richtung bestimmen, ist nicht etwas, dessen Sein mit dem Nichtsein von Linien überhaupt identisch ist, sondern wieder eine Linie, die Linie X, während wir, wenn wir die Geschwindigkeit einer Bewegung bestimmen, diese Bewegung mit dem Gegenteil von Bewegung überhaupt, dem Ruhezustande, vergleichen. Unterscheiden sich hiernach die Verhältnisse einer Linie zu ihrer Richtung und einer Bewegung zu ihrer Geschwindigkeit, die einander insofern verwandt sind, als sowohl die Richtung einer Linie als auch die Geschwindigkeit einer Bewegung Glieder von Qualitätsunterschieden sind, deren Weite zahlenmässig bestimmt werden kann, in zwiefacher Hinsicht, so sind dagegen diejenigen von Krümmung und Richtung und von Beschleunigung und Geschwindigkeit völlig gleichartig, wie aus folgender Betrachtung erhellt. Es seien S und X gerade Linien, die sich im Punkte P schneiden, α der Winkel, den sie miteinander bilden, Q ein beliebiger auf dem Teile von S, der ein Schenkel des Winkels α ist, liegender Punkt, Δs die Länge der Strecke PQ, und Δk die Länge des zwischen die Schenkel des Winkels α fallenden Bogens des P zum Mittelpunkte habenden und durch Q gehenden Kreises, so ist α proportional Δk und näher, wenn als Winkeleinheit derjenige Zentriwinkel gewählt wird, zu welchem ein dem Radius gleicher Kreisbogen gehört, gleich $\Delta k/\Delta s$. Ist S nicht eine gerade Linie, sondern eine Kurve, und Δs die Grösse der Kurvenstrecke PQ, so ist der dem Differenzenquotienten $\Delta k/ds$ entsprechende Differentialquotient $dk/\Delta s$ die Grösse des Winkels α, den die Kurve S im Punkte P mit der Geraden X macht, und dies ist auch dann der Fall, wenn S eine gerade Linie ist. Ebenso ist

$$\alpha_1 = \lim \Delta k_1/\Delta s = d k_1/ds,$$

wenn α_1 den Winkel, den die (ebene) Kurve S in ihrem Punkte Q mit der Geraden X (oder einer parallel mit X durch Q gezogenen Geraden) macht, QR eine auf PQ folgende Kurvenstrecke von der Grösse Δs, und Δk_1 den zwischen die Schenkel des Winkels α_1 fallenden Bogen des durch den Punkt R gehenden und Q zum Mittelpunkte habenden Kreises bedeuten. Angenommen nun, die Krümmung d. i. die Richtungsveränderung σ der Kurve S sei

gleichförmig (S also ein Kreis), so ist sie im Punkte P der Winkeldifferenz $\alpha_1 - \alpha$ oder $\Delta\alpha$ direkt und Δs umgekehrt proportional, und näher gleich $\Delta\alpha/\Delta s$, wenn man die Krümmung eines Kreises, bei dem $\Delta\alpha = \Delta s$, dessen Radius also 1 ist, gleich 1 setzt. Wird nicht vorausgesetzt, dass die Krümmung der Kurve S konstant sei, so giebt der dem Differenzenquotienten $\Delta\alpha/\Delta s$ entsprechende Differentialquotient $d\alpha/ds$ ihre Grösse im Punkte P an, mithin auch, da

$$\alpha = dk/ds$$

der Differentialquotient zweiter Ordnung d^2k/ds^2. Stellt man neben die Grössebestimmung des die Richtung einer geraden oder einer krummen Linie bestimmenden Winkels $\alpha = dk/ds$, und der Krümmung $\sigma = d\alpha/ds = d^2k/ds^2$, diejenige der Geschwindigkeit eines eine gerade oder krumme Linie S durchlaufenden Massenpunktes $v = ds/dt$, und der Beschleunigung

$$j = dv/dt = d^2s/dt^2,$$

so ist die Analogie, die in mathematischer Hinsicht zwischen den Begriffen der Beschleunigung und der Krümmung, sowie denen der Verhältnisse der Beschleunigung zur Geschwindigkeit und der Krümmung zur Richtung besteht, augenfällig. Aber auch unter dem Gesichtspunkte der ontologischen Grössenlehre erscheinen die Krümmung und die Beschleunigung an sich und in ihren Verhältnissen zur Richtung und zur Geschwindigkeit als völlig analoge Bestimmtheiten. Denn erstens ist, wenn wir als die Krümmung einer Kurve S im Punkte P eine Zahl σ angeben, die Quantität, die wir bestimmen, in Wirklichkeit nicht diese Krümmung, sondern die Weite des qualitativen Unterschiedes der Kurve S hinsichtlich ihrer Krümmung im Punkte P von der krümmungslosen, d. i. der geraden Linie, oder auch (was auf dasselbe hinauskommt) die Weite des qualitativen Unterschiedes der Richtung der Kurve im Punkte P hinsichtlich ihrer Krümmung von einer ihr quantitativ gleichen, d. i. denselben Winkel α mit einer gewissen geraden Linie X bildenden konstanten Richtung, also der Richtung der Tangente an S im Punkte P, gleichwie die Quantität, die wir bestimmen, wenn wir als die Beschleunigung einer Bewegung $\mathfrak{B}$ in einem gewissen Zeitpunkte eine Zahl j angeben, in Wirklichkeit nicht diese Beschleunigung ist, sondern die Weite des qualitativen Unterschiedes der Bewegung $\mathfrak{B}$ hinsichtlich ihrer Beschleunigung von der unbeschleunigten Bewegung oder (was auf dasselbe hinauskommt) die Weite des qualitativen Unter-

schiedes der Geschwindigkeit der Bewegung 𝔅 hinsichtlich ihrer Beschleunigung von der ihr quantitativ gleichen gleichförmigen Geschwindigkeit. Eine Linie oder Richtung von einer gewissen Krümmung müsste ja, wenn sie zu ihrer Krümmung in dem Verhältnisse des Quantums zur Quantität stände, in Linien oder Richtungen von geringerer Krümmung in einer ihre Länge nicht berührenden Weise geteilt, gleichsam gespaltet werden können, z. B. jeder noch so kleine Kreisbogen mit dem Radius 1 in zwei gleich lange Bogen mit dem Radius 2, und das würde doch auch derjenige für absurd erklären, der glaubte, eine Bewegung mit der Beschleunigung 1 bestehe aus zwei gleichzeitigen Bewegungen mit der Beschleunigung 1/2. Zweitens gehören der messbare Unterschied einer die Krümmung σ habenden von einer geraden Richtung (oder Linie) und derjenige einer die Beschleunigung j habenden von einer gleichförmigen Geschwindigkeit (oder Bewegung) derselben Art der Unterschiedsquanta an, nämlich derjenigen, für die wir als Beispiele kennen gelernt haben den Unterschied eines Tones, dessen Höhe grösser als Null, von demjenigen, dessen Höhe gleich Null ist, einer zwischen Rot und Blau stehenden Farbe von dem reinen Rot oder dem reinen Blau, einer Annahme, deren Wahrscheinlichkeit grösser als Null, von einer solchen, deren Wahrscheinlichkeit gleich Null ist. Denn eine Richtung oder Linie verschwindet nicht, wenn ihre Krümmung, und eine Geschwindigkeit oder Bewegung nicht, wenn ihre Beschleunigung Null wird, wie eine Bewegung verschwindet, wenn ihre Geschwindigkeit Null wird; dasjenige, m. a. W., womit wir eine Richtung oder Linie vergleichen, wenn wir ihr eine Krümmung σ zuschreiben, ist wiederum eine Richtung oder Linie, nämlich die gerade, wie dasjenige, womit wir eine Geschwindigkeit oder Bewegung vergleichen, wenn wir ihr eine Beschleunigung j zuschreiben, wiederum eine Geschwindigkeit oder Bewegung, nämlich die gleichförmige ist, während dasjenige, womit wir eine Bewegung vergleichen, wenn wir ihr eine Geschwindigkeit v zuschreiben, das Gegenteil aller Bewegung, der Zustand der Ruhe, ist.

11. Auf einen Qualitätsunterschied und seine Weite scheint mir endlich auch der Begriff der Empfindungsintensität hinzuweisen. Wäre ein Empfindungsinhalt ein Quantum und seine Intensität seine Quantität, so müsste, wie schon bemerkt wurde, diese Intensität aus Teilen zusammengesetzt sein, deren jeder die Intensität

eines Teiles des Empfindungsinhaltes wäre, solche Teile sind aber in keinem Empfindungsinhalte zu bemerken. Auf die Frage nun, welches Quantums Quantität wir denn wirklich bestimmen, wenn wir die Grösse der Intensität eines Empfundenen beurteilen, wird sich wohl keine andere Antwort finden lassen als diese: das gesuchte Quantum ist der Unterschied zwischen dem hinsichtlich seiner Intensität betrachteten Empfundenen und dem, was an die Stelle des Empfundenen treten würde, wenn ihm seine Intensität verloren ginge und durch keine andere ersetzt würde, oder, vom Standpunkte der gewöhnlichen Auffassung aus geredet, wenn seine Intensität gleich Null würde, gleichwie das Quantum, dessen Quantität wir bestimmen, wenn wir einem Tone eine gewisse Höhe zuschreiben, der Unterschied des hinsichtlich seiner Höhe betrachteten Tones von demjenigen Tone, dessen Höhe wir gleich Null zu setzen beschlossen haben, etwa dem tiefsten aller möglichen Töne, ist, oder, wenn wir die Geschwindigkeit einer Bewegung einer gewissen Zahl von Geschwindigkeitseinheiten gleichsetzen, der Unterschied dieser hinsichtlich ihrer Geschwindigkeit betrachteten Bewegung vom Ruhezustande.

Der Unterschied, dessen Weite wir bestimmen, wenn wir einem Empfundenen eine intensive Quantität von gewisser Grösse zuschreiben, ist näher von der Art desjenigen, den wir messen, wenn wir die Geschwindigkeit einer Bewegung einer Zahl v gleichsetzen. Denn wie eine Bewegung in das Gegenteil aller Bewegung, den Ruhezustand, übergeht, wenn, nach der gewöhnlichen Auffassung, ihre Geschwindigkeit Null wird (während mit dem Herabsinken der Höhe eines Tons auf den Wert Null nicht Stille eintritt, sondern der Ton sich in einen anderen, nämlich denjenigen, nach welchem wir den Nullpunkt der Höhenskala festgesetzt haben, verwandelt, oder das Verschwinden der Rötlichkeit einer Farbe der Reihe Rot-Blau nicht das Verschwinden der Farbe selbst, sondern ihr Übergang in reines Blau ist), so tritt auch an die Stelle eines Empfindungsinhaltes, dessen Intensität Null wird (nach der gewöhnlichen Auffassung), nicht ein gleichartiger Empfindungsinhalt, sondern die Abwesenheit aller gleichartigen Empfindungsinhalte. Womit wir ein Empfinden vergleichen, wenn wir seine Intensität irgend einer Zahl von Intensitätseinheiten gleichsetzen, ist nicht wieder ein Empfinden, sondern ein Nicht-Empfinden. Wie jedoch die Ruhe eines Körpers, mit der wir

seine Bewegung vergleichen, wenn wir derselben eine gewisse Geschwindigkeit als ihre Quantität zuschreiben, nicht in der blossen Abwesenheit aller Bewegung in ihm besteht, sondern, obwohl das Ruhen eines Körpers mit seinem Sich-nicht-bewegen identisch ist, eine positive Bestimmtheit ist, so vergleichen wir auch ein Empfundenes, wenn wir ihm eine Intensität von gewisser Grösse zuschreiben, nicht mit der blossen Abwesenheit alles gleichartigen Empfindbaren, sondern mit etwas, was ein ebenso positives Sein hat wie es selbst. Und wie bei jeder Geschwindigkeitsabnahme etwas anderes ebenso Positives eintritt, nämlich Langsamkeit, oder mit jeder Abnahme an Unähnlichkeit mit der Ruhe eine gleiche Zunahme an Ähnlichkeit mit der Ruhe zusammenfällt, so dass ein Körper, der aus dem Zustande einer eine gewisse Geschwindigkeit besitzenden Bewegung in den der Ruhe übergeht, in keinem Augenblicke einen Verlust an positivem Sein erleidet, so wird auch jede Intensitätsveränderung eines Empfundenen, die wir als Verminderung auffassen, durch die Vermehrung von etwas anderem ausgeglichen, oder bei jeder Intensitätsverminderung giebt es ein Positives, dem der Bewusstseinszustand (das psychische Verhalten) in demselben Masse mehr ähnlich wird, in welchem es ihm weniger unähnlich wird. Dass das wirkliche Quantum, welches wir im Auge haben, wenn wir einem Empfundenen als seine Quantität eine Intensität von gewisser Grösse zuschreiben, der Unterschied dieses Empfundenen nicht von einem Positiven, sondern von der blossen Abwesenheit alles gleichartigen Empfundenen sei, würde nichts anderes heissen, als dass das Empfundene selbst dieses Quantum sei; denn die Abnahme der Unähnlichkeit eines Empfundenen oder die Zunahme seiner Ähnlichkeit mit der blossen Negation alles gleichartigen Empfundenen wäre ein Abnehmen des Empfundenen selbst hinsichtlich seiner Intensität von seinem anfänglichen Werte bis zu Null, das Empfundene wäre also selbst ein Quantum und seine Intensität seine Quantität. Es verhielte sich dann so, wie Kant lehrte mit den Worten: „Der Mangel der Empfindung in demselben Augenblicke würde diesen als leer vorstellen, mithin $= 0$. Was nun in der empirischen Anschauung* der Empfindung korrespondiert, ist Realität (realitas phaenomenon); was dem Mangel derselben entspricht, Negation $= 0$. Nun ist aber jede Empfindung der Verringerung fähig, so dass sie abnehmen und so allmählich verschwinden kann. Daher ist

zwischen Realität in der Empfindung und Negation ein kontinuierlicher Zusammenhang vieler möglicher Zwischenempfindungen, deren Unterschied von einander immer kleiner ist, als der Unterschied zwischen der gegebenen und dem Zero, oder der gänzlichen Negation. . . . Nun nenne ich diejenige Grösse, die nur als Einheit apprehendiert wird, und in welcher die Vielheit nur durch Annäherung zur Negation = 0 vorgestellt werden kann, die intensive Grösse. Also hat jede Realität in der Erscheinung intensive Grösse, d. i. einen Grad."

Der Ansicht, dass das, was wir als die Grösse der Intensität eines Empfindungsinhaltes auffassen, in Wahrheit in der Weite des Qualitätsunterschiedes zwischen diesem Empfindungsinhalte und etwas Positivem, dessen Sein mit dem Nichtsein aller gleichartigen Empfindungsinhalte identisch sei, bestehe, — dieser Ansicht scheint die Thatsache entgegenzustehen, dass keinesweges alle empfindbaren Qualitäten einen solchen positiven Gegensatz haben, da z. B. ein geruchloser Körper keine wahrnehmbare Qualität hat, die es ihm unmöglich machte, zu riechen, eine nicht schmeckende Substanz unseren Sinnen keine Eigenschaft zu erkennen giebt, die mit dem Schmecken so unvereinbar wäre, wie die Ruhe mit der Bewegung, und mit dem Schwächer-werden des Tons einer Seite nicht die Annäherung an ein das Tönen ausschliessendes Verhalten, ein positives Nichttönen Hand in Hand geht. So würde es sich in der That verhalten, wenn auch das eine Thatsache wäre, dass unsere Empfindungsinhalte den Körpern an sich zukommende Eigenschaften wären. Da aber die thatsächliche Wirklichkeit unserer Empfindungsinhalte lediglich die ist, die sie als Empfindungsinhalte haben, so darf auch nur gefolgert werden, dass unser Ich, das Subjekt unseres Bewusstseins, sich während der Zeit, in der es keine Empfindungen gewisser Art hat, in einem positiven Zustande befindet, der alle Empfindungen dieser Art ausschliesst und dadurch da ist, dass keine Empfindungen dieser Art da sind, der sich also zu der Art der Empfindungen verhält, wie die Körperruhe zu den räumlichen Bewegungen. Und diese Auffassung des Nichtseins einer gewissen Art von Empfindungen im bewussten Ich als eines positiven Zustandes der Bewusstseinsruhe hinsichtlich der Empfindungen jener Art, z. B. der Empfindungen des Geruches oder des Geschmackes oder des Gehörs, wird sich wenigstens durch Be-

rufung auf Thatsachen ebensowenig widerlegen lassen, wie diejenige der Körperruhe als eines positiven Zustandes der Körper. Übrigens würde die unrichtige Folgerung, dass das Fehlen aller empfindbaren Qualitäten einer gewissen Art in einem Körper mit einer positiven wahrnehmbaren Beschaffenheit dieses Körpers zusammenfallen müsste, wenn nicht das Empfundene selbst, sondern nur die Verschiedenheit seines Seins von seinem Nichtsein ein Quantum wäre, keine Anwendung finden auf diejenigen Empfindungsinhalte, die allein uns in völlig deutlicher oder bestimmter Weise als Qualitäten von Körpern erscheinen, nämlich die Farben. Denn die Oberfläche einer nicht leuchtenden undurchsichtigen und Lichtstrahlen weder regelmässig noch unregelmässig reflektierenden, also keine Gesichtsempfindung in uns erregenden Körpers erscheint unserem Auge als schwarz, das Schwarzsein aber ist nicht die blosse Abwesenheit aller Farben, die wir an einem Lichtstrahlen unregelmässig reflektierenden Körper sehen, aller Lichtfarben, sondern nicht minder als Rot, Grün, Weiss u. s. w. eine positive Qualität, die wir wirklich sehen, obwohl wir sie nicht empfinden. Es mag sein, dass stets auch dann, wenn wir einen schwarzen Körper sehen, eine Reizung unserer Sehnerven stattfindet, nämlich nicht durch Lichtstrahlen, sondern durch einen physiologischen Vorgang, und dass uns daraus eine eigentümliche Empfindung entsteht, deren Inhalt wie alle Empfindungsinhalte eine Intensität von irgend einer positiven Grösse hat, aber diese Empfindung ist dann nicht das Sehen der schwarzen Farbe, deren Intensität ja gleich Null ist, sondern verbindet sich mit diesem Sehen als eine eigentümliche Weise subjektiven Fühlens. Das Sehen der schwarzen Farbe ist kein Empfinden, die schwarze Farbe stellt sich uns von selbst vor Augen, wenn wir an einem undurchsichtigen und nicht spiegelnden Körper keine Lichtfarben sehen. Wenn also die Intensität einer eine Fläche bedeckenden Lichtfarbe abnimmt und schliesslich Null wird und damit das Nichtsein aller empfindbaren Farbe überhaupt an der betreffenden Fläche eintritt, so fällt dieses Verschwinden aller empfindbaren Farben von selbst mit dem Entstehen einer positiven Qualität, der sichtbaren aber nicht empfindbaren schwarzen Farbe, zusammen, ganz so, wie sich ein Körper in dem Masse, in welchem seine Geschwindigkeit und mit ihr seine Bewegung abnimmt, dem positiven Zustande der Ruhe nähert.